This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

ubert

rbücher.

a von
k. 2.8o.
'flieger

e von

ohnert

torik,
ɛtten-
ıngen
nburg.

taren
Altona.

ɔf. Dr.

ı Prof.

Teil:
r. Max

Meyer

ıente
ie von Dr. John

Prof. Dr. L.
. 8.—.
Prof. C. Runge in

Ausgleichungs-
in Wien. Mk. 8.—.
n Dr. W. Gross-

aumes II. Teil:
des von Prof.
Mk. 4.40.

MATHEMATICS
QA
154
.S384
v.2

Band XXVII: **Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Professor Dr. Karl Doehlemann in München. Mk. 10.—

„ XXIX: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. Mk. 4.80.

„ XXXI: **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Strassburg. Mk. 8.50.

„ XXXIV: **Liniengeometrie mit Anwendungen I. Teil** von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck. Mk. 12.—.

„ XXXV: **Mehrdimensionale Geometrie I. Teil: Die linearen Räume** von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen. Mk. 10.—.

„ XXXIX: **Thermodynamik I. Teil** von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen. Mk. 10.—.

„ XL: **Mathematische Optik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Mk. 6.—.

„ XLI: **Theorie der Elektrizität und des Magnetismus I. Teil: Elektrostatik u. Elektrokinetik** von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg. Mk. 5.—.

„ XLIV: **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen II. Teil** von Prof. Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Prof. Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. Mk. 5.80.

„ XLV: **Niedere Analysis II. Teil: Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. Mk. 3.80.

„ XLVI: **Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen** v. Oberlehrer E. Landfriedt in Strassburg. Mk. 4.50.

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Integralrechnung von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.
Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.
Darstellende Geometrie II. Teil: Anwendungen der darstellenden Geometrie von Prof. Erich Geyger in Kassel.
Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.
Dynamik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Technische Mechanik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Geodäsie von Prof. Dr. A. Galle in Potsdam.
Allgemeine Funktionentheorie von Dr. Paul Epstein in Strassburg.
Räumliche projektive Geometrie.
Geometrische Transformationen II. Teil von Prof. Dr. Karl Doehlemann in München.

Wenden!

Theorie der höheren algebraischen Kurven von Dr. Heinr. Wieleitner in Speyer.
Elliptische Funktionen.
Theorie u. Praxis d. Reihen v. Prof. C. Runge in Hannover.
Allgemeine Formen- und Invariantentheorie von Prof. Dr. Jos. Wellstein in Giessen.
Mehrdimensionale Geometrie II. Teil von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen.
Liniengeometrie II. Teil von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.
Kinematik von Prof. Dr. Karl Heun in Karlsruhe.
Angewandte Potentialtheorie von Oberlehrer Grimsehl in Hamburg.
Theorie der Elektrizität und des Magnetismus II. Teil: Magnetismus und Elektromagnetismus von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.
Thermodynamik II. Teil von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen.
Elektromagnetische Lichttheorie von Prof. Dr. J. Classen in Hamburg.
Gruppen- und Substitutionentheorie von Prof. Dr. E. Netto in Giessen.
Theorie der Flächen dritter Ordnung.
Mathematische Potentialtheorie.
Festigkeitslehre für Bauingenieure von Dr. ing. H. Reissner in Berlin.

Elemente der Stereometrie

von **Prof. Dr. Gustav Holzmüller.**

I. Band: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren. Preis broschiert Mk. 6.—, gebunden Mk. 6.60.
II. Band: **Die Berechnung einfach gestalteter Körper.** Mit 156 Figuren. Preis broschiert Mk. 10.—, gebunden Mk. 10.80.
III. Band: **Die Untersuchung und Konstruktion schwierigerer Raumgebilde.** Mit 120 Figuren. Preis broschiert Mk. 9.—, gebunden Mk. 9.80.
IV. Band: **Fortsetzung der schwierigeren Untersuchungen.** Mit 89 Figuren. Preis broschiert Mk. 9.—, gebunden Mk. 9.80.

Dieses Werk dürfte wohl einzig in seiner Art dastehen, denn in so umfassender und gründlicher Weise ist die Stereometrie noch nicht behandelt worden. Das Wort „elementar" ist dabei so zu nehmen, dass die höhere Analysis und im allgemeinen auch die analytische Raumgeometrie ausgeschlossen bleiben, während die synthetische neuere Geometrie in den Kreis der Betrachtungen hineingezogen wird, soweit es die Methoden der darstellenden Geometrie erfordern.

Alle Figuren, auf die ganz besondere Sorgfalt verwendet worden ist, sind streng konstruiert und fast jede ist ein Beispiel der darstellenden Geometrie.

Trotz des elementaren Charakters geht diese neue Stereometrie weit über das übliche Ziel hinaus, gibt neben den Lehrsätzen umfangreiches Übungsmaterial, betont die Konstruktion und die Berechnung gleichmässig und wird somit an Vielseitigkeit und Gediegenheit des Inhalts wohl von keinem der hervorragenderen Lehrbücher erreicht.

510
S38n

Sammlung Schubert XLV

Niedere Analysis

von

Dr. Hermann Schubert,
Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg

Zweiter Teil

Funktionen, Potenzreihen, Gleichungen

Mit 3 Figuren

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1903

Alle Rechte
von der Verlagshandlung vorbehalten.

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Vorwort.

Von der „Niederen Analysis“, die in meiner „Sammlung von Lehrbüchern für Studierende der Mathematik“ den V. Band bildet, erschien die erste Hälfte schon im Sommer 1902. Die zweite Hälfte liegt hier vor. Diese Teilung in zwei Teile ist auch sachlich begründet. Während im ersten Teile das Verhältnis ganzer Zahlen, also die rationale Zahl, die Hauptrolle spielt, wird hier die Zahl auch als irrational, und im Zusammenhang damit, als veränderlich hingestellt. Dieser zweite Teil zerfällt demgemäß in drei Abschnitte, welche beziehungsweise die Funktionen, die Potenzreihen und die Gleichungen behandeln. Als Leser habe ich nicht allein Primaner an höheren Lehranstalten, sondern auch solche Studierende der Mathematik im Auge gehabt, welche auf der Schule noch nicht Gelegenheit hatten, die hier behandelten Gebiete kennen zu lernen, obwohl die meisten Universitätsprofessoren voraussetzen, daß diese Gebiete selbst den jüngsten Semestern geläufig sind. Dem Begriff „Niedere Analysis“ entsprechend, habe ich die Methoden der Differentialrechnung hier ausgeschlossen, also z. B. die Potenzreihen lediglich nach der Methode der zu bestimmenden Koeffizienten abgeleitet.

Hamburg, am 18. April 1903.

Hermann Schubert.

131917

Inhaltsverzeichnis

des

zweiten Teils der „Niederen Analysis".

I. Abschnitt: **Funktionen.** Seite

§ 1. Die Irrationalzahl 1
§ 2. Begriff der Veränderlichkeit 7
§ 3. Begriff der Funktion 18
§ 4. Besondere Grenzwerte 26
§ 5. Maxima und Minima 32
§ 6. Die endliche geometrische Reihe 47
§ 7. Die unendliche geometrische Reihe 55
§ 8. Zinseszins- und Rentenrechnung 62
§ 9. Die Zahl e als Grenzwert 72

II. Abschnitt: **Potenzreihen.**

§ 10. Konvergenz der Reihen 79
§ 11. Die Methode der zu bestimmenden Koeffizienten 88
§ 12. Die Exponentialreihen 94
§ 13. Die logarithmischen Reihen 102
§ 14. Die Berechnung der dekadischen Logarithmen . 113
§ 15. Der binomische Lehrsatz für beliebige reelle Exponenten 121
§ 16. Die trigonometrischen Reihen 128
§ 17. Die Arcustangens-Reihe und die Berechnung der Zahl π 135

III. Abschnitt: **Gleichungen.**

§ 18. Die komplexen Zahlen 146
§ 19. Die binomischen Gleichungen 157
§ 20. Verknüpfung der komplexen Zahlen durch die Operationen dritter Stufe 169
§ 21. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen 178
§ 22. Lösung der Gleichungen dritten Grades 185
Ausgewählte Resultate zu den Übungen . . . 209

I. Abschnitt.

Funktionen.

§ 1. Die Irrationalzahl.

Vom Begriff des Zählens ausgehend, gelangt man durch das Prinzip der Permanenz und durch die Definitionen der Rechnungsarten erster und zweiter Stufe zum Begriff der positiven und der negativen

rationalen Zahl,

wie dies in den vier ersten Abschnitten meiner „Elementaren Arithmetik und Algebra“ (Band I dieser Sammlung) ausführlich dargelegt ist.*)

Die Rechnungsarten erster und zweiter Stufe und die bei der Erweiterung des Zahlbegriffs aus ihnen hervorgehenden rationalen Zahlen, bilden insofern ein in sich abgeschlossenes Ganze, als jede beliebige Verknüpfung rationaler Zahlen durch diese Rechnungsarten wieder zu einer rationalen Zahl führt, falls bei dieser Verknüpfung eine Division durch Null ausgeschlossen ist.

Wenn man jedoch die Rechnungsarten dritter Stufe zuläßt, so gelangt man zu Zahl-Verknüpfungen, die keiner rationalen Zahl gleichgesetzt werden können. Zwar sind schon im V. und VI. Abschnitt des zitierten Buches derartige Verknüpfungen besprochen und haben zu neuen Erweiterungen des Zahlbegriffs geführt. So entstanden vermöge des Permanenzprinzips aus den Rechnungsarten dritter Stufe die irrationalen Zahlen, die imaginären und die imaginär-

*) Vgl. insbesondere § 4, § 8, § 9, § 14 des zitierten Buches.

komplexen Zahlen. Während jedoch dort die Irrationalzahl aus verschiedenen Quellen entsprang, aus den Quadratwurzeln, aus den allgemeinen Wurzeln und aus den Logarithmen, soll sie hier einheitlich definiert*) werden.

Jede rationale Zahl gibt, in einen Dezimalbruch entwickelt, entweder einen geschlossenen**) Dezimalbruch mit einer abzählbaren Menge von Dezimalstellen oder einen periodischen Dezimalbruch.**) Wenn nun aber ein Dezimalbruch, ohne periodisch zu sein, sich nicht schließt, sondern immer noch mehr Stellen hat, als jede noch so große Zahl angibt, so betrachtet man ihn und jeden Ausdruck, der ihm gleichgesetzt werden kann, auch als Zahl und nennt eine solche Zahl irrational. So nennt man $\sqrt{2}$ oder, was dasselbe ist, $2^{\frac{1}{2}}$ irrational, weil man nachweisen kann, daß

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots.^{***})$$

ist, und weil man, wenn man nur wollte, zu den drei angegebenen Dezimalstellen noch beliebig viele weitere hinzufügen könnte, ohne jedoch den Dezimalbruch schließen oder zu einer periodischen Wiederholung der Dezimalstellen kommen zu können.

Da auch die rationalen Zahlen in Dezimalbruchform dargestellt werden können, z. B.:

$$4 = 4{,}00000$$
$$\tfrac{3}{4} = 0{,}75000$$
$$10\tfrac{7}{22} = 10{,}3\overline{18}18, \text{ wo 18 Periode ist,}$$

so können wir jede bisher definierte positive Zahl als in Dezimalbruchform darstellbar ansehen, gleichviel, ob sie rational ist oder nicht.

---

*) Der Verfasser weiß sehr wohl, daß die hier folgende Definition den Anforderungen wissenschaftlicher Strenge nicht entspricht. Wenn er trotzdem die Irrationalzahl so definiert, wie es hier geschieht, so hat er sich dabei von der Rücksicht leiten lassen, daß dieses Buch für Anfänger geschrieben ist. Wer eine auf wissenschaftlicher Höhe stehende Definition der Irrationalzahl haben will, der lese den Artikel von Herrn Pringsheim im ersten Bande der „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften“ (Leipzig, 1898) und die dort angeführten Quellen.

**) § 23 des I. Bandes dieser Sammlung.

***) § 25 des I. Bandes dieser Sammlung.

Indem wir die Irrationalzahl den Definitionen und Gesetzen der Rechnungsarten erster und zweiter Stufe unterwerfen und dabei das Permanenzprinzip anwenden, gelangen wir zum Begriff der negativen irrationalen Zahl, sowie dazu, zu erkennen, was bei der Vergleichung zweier beliebiger Zahlen, mögen sie nun rational oder irrational sein,

gleich, größer und kleiner

heißt. Gleich heißen zwei Zahlen, wenn ihre Differenz Null ist. Ferner heißt eine Zahl a größer bezw. kleiner als eine Zahl b, wenn $a - b$ positiv bezw. negativ ist.

Erst, nachdem soeben die Begriffe „größer" und „kleiner" auch für die Vergleichung von irrationalen Zahlen untereinander und von rationalen Zahlen mit irrationalen Zahlen definiert sind, kann man die folgende wichtige Eigenschaft der irrationalen Zahlen aussprechen:

Zu jeder irrationalen Zahl gibt es immer zwei rationale Zahlen mit beliebig kleinem Unterschied, derartig, daß die eine rationale Zahl kleiner, die andere größer als die irrationale Zahl ist; oder, kürzer ausgedrückt:

Jede Irrationalzahl läßt sich in zwei beliebig nahe rationale Grenzen einschließen.

Demgemäß kann man zwei irrationale Zahlen einander gleich setzen, wenn sie beide immer zwischen denselben beiden rationalen Grenzen liegen bleiben, wie klein auch der Unterschied zwischen diesen beiden rationalen Grenzen gemacht werde.

Jede Zahl, die positiv oder negativ, rational oder irrational oder auch Null ist, nennen wir reell.

Die Verknüpfung zweier reeller Zahlen durch die Rechnungsarten erster und zweiter Stufe führt immer wieder auf eine reelle Zahl, falls eine Division durch Null ausgeschlossen ist. Wenn man jedoch reelle Zahlen den Rechnungsarten dritter Stufe unterwirft, so muß man, wie schon in § 30, § 31 und § 32 des I. Bandes dieser Sammlung ausgeführt ist, noch mehr Fälle ausschließen, damit jede solche Verknüpfung reeller Zahlen einerseits ausführbar ist, andrerseits auch eindeutig ist, d. h. zu einer einzigen reellen Zahl führt. Die noch auszuschließenden Fälle sind namentlich folgende:

1) Potenzierungen bei negativer Basis und nicht ganzzahligem Exponenten;

2) Radizierungen bei nicht positivem Radicandus;

3) Radizierungen mit dem Wurzel-Exponenten Null;

4) Logarithmierungen mit nicht positiver Basis und mit der Basis 1;

5) Logarithmierungen mit nicht positivem Logarithmandus.

Reelle Zahlen können auch noch auf andere Weise als durch die sieben Rechnungsarten erster bis dritter Stufe entstehen, z. B. durch die Geometrie, indem dieselbe den Winkel nicht allein als Teil einer vollen Umdrehung auffaßt, sondern auch als Verhältnis zweier Seiten eines Dreiecks mißt, in welchem dieser Winkel liegt, und in welchem ein zweiter Winkel eine bestimmte Größe hat, etwa die einer Viertel-Umdrehung. Die so entstehenden Begriffe Sinus und Tangens*) führen, wenn der Winkel ein kleiner als ein Viertel bleibendes rationales Verhältnis zur vollen Umdrehung hat, meist zu irrationalen Zahlenwerten. Nur, wenn der Winkel $\frac{1}{12}$ der vollen Umdrehung beträgt, ist der zugehörige Sinus eine rationale Zahl, bei andern rationalen Brüchen $< \frac{1}{4}$ immer irrational. Der Tangens eines Winkels, dessen Verhältnis zur vollen Umdrehung rational und $< \frac{1}{4}$ ist, ist immer irrational, außer, wenn dieses Verhältnis $\frac{1}{8}$ ist.

So wie Sinus und Tangens als Verhältnisse gerader Strecken zu reellen Zahlen führen, die rational und irrational sein können, so führt auch das Verhältnis einer krummen zu einer geraden Strecke immer zu einer reellen Zahl, die rational oder irrational sein kann. So ist das Verhältnis der Peripherie eines Kreises zu dessen Durchmesser eine reelle Zahl, von der Lambert 1761 bewiesen hat, daß sie irrational ist. Überhaupt ist das Verhältnis irgend zweier gleichartiger Dinge immer eine reelle Zahl, die rational oder irrational sein kann. So ist das Verhältnis der Zeit, welche die Erde braucht, um sich um die Sonne herum zu bewegen, zu der Zeit, welche die Erde zur Rotation um ihre Achse braucht, eine rationale oder irrationale Zahl, die größer

*) Vgl. Band III dieser Sammlung.

als 365 und kleiner als 366 ist. Zweitens ist das Verhältnis der Dichtigkeit des Goldes zu der des Wassers eine rationale oder irrationale Zahl, die größer als 19, kleiner als 20 ist. Drittens ist das Verhältnis der Arbeit, die in Wärme umgesetzt, 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad Celsius zu erwärmen vermag, zu der Arbeit, die 1 Kilogramm 1 Meter hoch hebt, gleich einer rationalen oder irrationalen Zahl, von der man weiß, daß sie ungefähr $\frac{1}{424}$ beträgt. Für alle solche Verhältnisse gibt man **rationale** Zahlenwerte, meist in Dezimalbruchform, an, ohne sich darum zu bekümmern, ob das Verhältnis in Wirklichkeit rational oder irrational ist.

Übungen zu § 1.

Welche von den folgenden Zahlen sind rational und welche irrational?

1) $\sqrt{16+25}$; 2) $\sqrt{9^3}$; 3) $\sqrt{147}:\sqrt{75}$; 4) $\sqrt{3}+\sqrt{6}$; 5) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$; 6) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$; 7) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-2\sqrt{10}$; 8) $\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{125}$; 9) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\sqrt{10}-\sqrt{\frac{45}{2}}$; 10) $\sqrt{25-16}$; 11) $\sqrt{\sqrt{11}+7}\cdot\sqrt{\sqrt{11}-7}$; 12) $\sqrt{0{,}9}$; 13) $\sqrt{0{,}1849}$; 14) $\sqrt[3]{25}$; 15) $\sqrt[5]{64}$; 16) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$; 17) $\log^{10} 20$; 18) $\log^{10}\sqrt{10}$; 19) $-\log^{5} 125$; 20) $343^{\frac{2}{3}}$?

Gib in Dezimalbruchform die folgenden Zahlen so an, daß der Fehler kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist:

21) $1+\sqrt{5}$; 22) $7-\sqrt{50}$; 23) $\log^{5} 0{,}2$; 24) $\sqrt[4]{256}-\sqrt[3]{9}$; 25) $\sqrt{0{,}121}$; 26) $\sqrt{1000}$; 27) $\sqrt{3{,}6}$; 28) $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 29) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; 30) $\log^{10} 9$; 31) $3^{\frac{1}{3}}$; 32) $\frac{1}{2}\sqrt{12}-\sqrt{27}$; 33) $\log^{3} 81-\log^{81} 3$; 34) $\sqrt[7]{7}$.

Schließe jede reelle Wurzel der folgenden Gleichungen in zwei Grenzen ein, die sich um $\frac{1}{1000}$ unterscheiden:

35) $x^2 = 3$; 36) $4x^2 = 20$; 37) $x = \frac{8}{x}$; 38) $x^3 = 2$;
39) $x^4 = 25$; 40) $x^2 = x + 11$; 41) $x^4 = 9x^2 + 20$;
42) $x^9 = -27$.

Was kann man über x behaupten, wenn man weiß, daß x negativ ist, und daß:

43) $x^2 = 5$; 44) $x^2 > 5$; 45) $x^2 < 5$; 46) $x^4 > 36$;
47) $\frac{1}{x^2} < 3$ ist?

48) Jemand berechnet sowohl $\sqrt{2} - 1$ als auch $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ und findet dabei immer dieselben rationalen Grenzen, wie weit er auch die Genauigkeit treiben mag. Was kann er dann über die beiden irrationalen Zahlen behaupten?

49) Beweise aus der Identität $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \sqrt{bc} = \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$, daß das arithmetische Mittel zweier reeller Zahlen nie kleiner ist, als ihr geometrisches Mittel.

50) Der Sinus von x Grad ist rational, und x ist eine ganze Zahl < 90. Wie groß muß x sein?

51) Man weiß, daß die positive ganze Zahl x kleiner als 45 ist. Was kann man dann über den Tangens von x Grad behaupten?

Größen, deren Verhältnis irrational ist, nennt man inkommensurabel. Gib an, ob die folgenden 7 Größenpaare kommensurabel oder inkommensurabel sind:

52) Seite und Diagonale eines und desselben Quadrats?

53) Inhalt eines Quadrats und Inhalt des Quadrats über seiner Diagonale?

54) Umfang eines Kreises und dessen Durchmesser?

55) Inhalt eines Kreises und Quadrat über seinem Durchmesser?

56) Umfang eines regulären Sechsecks und Durchmesser des ihm umbeschriebenen Kreises?

57) Radius eines Kreises und Seite des ihm einbeschreibbaren regulären Zehnecks?

58) Volumen einer Kugel und Volumen desjenigen ihr einbeschriebenen geraden Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist?

59) Ist anzunehmen, daß ein neu entdecktes chemisches Element ein rationales auf Wasser bezogenes spezifisches Gewicht hat?

60) Ist anzunehmen, daß die Umlaufszeit eines neu entdeckten Planeten und die Umlaufszeit der Erde um die Sonne ein irrationales Verhältniss haben?

61) Was kann man von einer Zahl aussagen, deren Dezimalstellen von der vierzigsten an sämtlich Null werden; wie groß man auch die Zahl der Dezimalstellen wählen mag?

62) Jemand findet von einer Zahl, daß ihre Dezimalstellen von der zehnten an gleich 3 werden, und 3 bleiben, wie weit man auch die Dezimalstellen berechnen mag. Was kann er über die Zahl behaupten?

63) Jemand findet von der Zahl π, daß sie bis zur hundertsten Dezimalstelle weder einem geschlossenen noch einem periodischen Dezimalbruch gleich sei. Kann er daraus mit Sicherheit schließen, daß π irrational sei?

---

§ 2. Begriff der Veränderlichkeit.

Alle denkbaren rationalen oder irrationalen Zahlen, die größer als a und kleiner als b sind, lassen sich nach ihrer Größe ordnen, so daß von je zwei solchen Zahlen c und d immer angegeben werden kann, ob, bei der Anordnung vom Kleineren zum Größeren, die Reihenfolge a c d b oder a d c b stattfindet. Die erstere Reihenfolge ist zu wählen, wenn $c < d$ ist, die letztere, wenn $c > d$ ist. Es ist naheliegend, sich solche Reihenfolgen räumlich zu veranschaulichen, indem man auf einer geraden Linie jeder Zahl einen Punkt zuordnet. Dann ist nur nötig, daß man eine beliebige Strecke als Maßeinheit nimmt, und daß man irgend einer Zahl einen bestimmten Punkt der geraden Linie zuweist, um zu erreichen, daß jeder beliebigen Zahl ein ganz bestimmter Punkt zugeordnet ist. Wenn dann eine Zahl um e kleiner ist, als eine andere, so muß auch der ihr zugeordnete Punkt um e Maßeinheiten vor dem Punkte liegen, der der zweiten Zahl

zugeordnet ist, wo das Wort „vor" die Richtung nach denjenigen Punkten hin bezeichnet, die die kleineren Zahlen darstellen. Auf einer unbegrenzten geraden Linie kann man so jede denkbare reelle Zahl durch einen Punkt darstellen. Der einer beliebigen negativen Zahl zugeordnete Punkt liegt dabei vor dem Punkte, der die Zahl Null darstellt und der Punkt, welcher eine beliebige positive Zahl abbildet, hinter dem Null-Punkte.

Wenn man bei dieser graphischen Abbildung der reellen Zahlen auf eine gerade Punktreihe nur die rationalen Zahlen abbildete, so würde zwar jeder rationalen Zahl ein Punkt zugeordnet sein; doch würde nicht umgekehrt jedem Punkte der geraden Linie eine rationale Zahl zugehören. Beispielsweise würde der Punkt, der vom Nullpunkte nach der positiven Seite hin um eine Strecke entfernt ist, die gleich der Diagonale des Quadrats über der Maßeinheit ist, die Zahl $+\sqrt{2}$, also keine rationale Zahl, darstellen. Man erkennt also, daß erst durch die Einführung der irrationalen Zahlen die graphische Abbildung der Zahlen auf eine gerade Punktreihe so gestaltet wird, daß jeder beliebigen Zahl ein bestimmter Punkt, aber auch umgekehrt jedem beliebig gewählten Punkte eine bestimmte Zahl entspricht.

Während in der elementaren Arithmetik ein Buchstabe immer eine bestimmte und unveränderliche Zahl bedeutet, so kann in der Analysis ein Buchstabe, etwa x, auch eine veränderlich gedachte Zahl bezeichnen. Man meint damit, daß x alle denkbaren reellen Zahlenwerte, nach ihrer Größe geordnet, nach einander annimmt, etwa von 0 bis 9. Man benutzt dabei stillschweigend die soeben besprochene geometrische Veranschaulichung, wenn man sagt, die veränderliche Größe x durchläuft alle reellen Zahlenwerte von 0 bis 9, oder noch kürzer, x durchläuft das Intervall von 0 bis 9. Die veränderlichen Größen pflegt man mit den letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z, u, v, w, die unveränderlichen oder konstanten Größen mit den ersten Buchstaben des Alphabets, etwa a, b, c oder A, B, C zu bezeichnen.

Wenn eine veränderliche Größe x sich einer konstanten Größe a immer mehr nähert, so daß schließlich der Unter-

schied zwischen x und a beliebig klein wird, so heißt a die Grenze (limes) von x. Um auszudrücken, daß a die Grenze von x ist, schreibt man:

$$a = \lim x$$

(gelesen: „a gleich limes x").

Beispielsweise ist $\sqrt{5}$ die Grenze, welcher sich der Dezimalbruch 2,23607... nähert, d. h., der Unterschied zwischen dem Dezimalbruch und $\sqrt{5}$ wird beliebig klein, wenn man die Anzahl der Stellen hinreichend groß macht.

Ferner ist $\frac{5}{9}$ die Grenze, der sich der periodische Dezimalbruch

$$0{,}\overline{5} = \lim\left(\frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots\right)$$

immer mehr nähert, je mehr Glieder der in Klammer stehenden Summe man berechnet.

Ein drittes Beispiel bietet das Verfahren des Archimedes um die Zahl π, das Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu dessen Durchmesser, näherungsweise zu berechnen. Er betrachtete den Umfang eines Kreises als die Grenze des Umfangs des dem Kreise einbeschriebenen bezw. umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks, wenn die Anzahl n der Seiten immer größer wird. In der Tat wird der Unterschied zwischen beiden Umfängen beliebig klein, wenn man nur n hinreichend groß macht.

Wenn eine veränderliche Größe immer kleinere und kleinere Werte annimmt, so daß sie kleiner werden kann, als jede gegebene Größe, so sagt man, sie werde unendlich klein oder verschwindend klein. Als Grenze einer derartig veränderlichen Größe ist die Zahl Null anzusehen.

Beispielsweise nimmt die Größe $x = z - 3$, wo z und deshalb auch x veränderliche Größen sind, immer kleinere Werte an, je kleiner man die Zahl annimmt, um welche z größer als 3 ist. Es ist erreichbar, daß x kleiner als ein Milliontel wird, wenn man nur z kleiner als $3\frac{1}{1000000}$ annimmt. Um das hiermit angedeutete Grenzverfahren nicht in jedem einzelnen Falle wiederholen zu müssen, schreibt man kurz:

$$\lim_{z=3}(z - 3) = 0.$$

Man beachte aber dabei, daß in dem unter lim gesetzten „$z = 3$“ das Gleichheitszeichen in einem neuen Sinne gebraucht wird, indem es andeutet, daß z nicht gleich 3 ist, sondern sich der Zahl 3 **nähert.**

Ebenso bedeutet:

$$\lim_{x=1} \overset{b}{\log} x = 0,$$

daß, wenn in $\overset{b}{\log} x$ für x nacheinander Werte gesetzt werden, deren Unterschied von 1 immer kleiner wird, das Resultat sich immer weniger von 0 unterscheidet, so daß, wenn man nur für x einen Wert setzt, der sich von 1 hinreichend wenig unterscheidet, man es erreichen kann, daß $\overset{b}{\log} x$ sich von 0 um beliebig wenig unterscheidet.

Häufig kommt es vor, daß Zähler und Nenner eines Bruches, beide verschwindend klein werden. Dann erhält man im Zähler ebenso wie im Nenner den Grenzwert 0. Da aber $0:0$ vieldeutig*) ist, so erwächst der Mathematik die Aufgabe, zu bestimmen, welcher Grenze sich der Wert des Bruches selbst nähert. Hierfür zwei Beispiele:

1) $\lim_{x=3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$. Man setze nacheinander $x = 4$, $x = 3\frac{1}{2}$, $x = 3\frac{1}{10}$, $x = 3\frac{1}{100}$. Dann erhält man beziehungsweise 7, $6\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{10}$, $6\frac{1}{100}$. Man erkennt also, daß $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ sich um so mehr der Zahl 6 nähert, je weniger die Zahl x sich von 3 unterscheidet. Dasselbe Resultat erkennt man auch, wenn man von vornherein $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ mit $x + 3$ identifiziert. Man beachte hierbei, daß sich x einer bestimmten Zahl von oben und von unten nähern kann. In dem soeben behandelten Beispiel hat sich x der Zahl 3 von oben genähert. Wenn sich x von unten nähern soll, hat man etwa zu setzen: $x = 2$, $x = 2\frac{1}{2}$, $x = 2\frac{9}{10}$, $x = 2\frac{99}{100}$, wodurch man beziehungsweise 5, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{9}{10}$, $5\frac{99}{100}$ erhält, und auch erkennt, daß der gesuchte Grenzwert 6 ist.

2) $\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Um dieses Resultat zu verstehen, beachte man zuerst, daß man sich dabei x nicht in Teilen

*) Vgl. Bd. I dieser Sammlung, § 11.

der vollen Umdrehung (in Graden) vorzustellen hat, sondern als Bogen eines Zentriwinkels in einem Kreise vom Radius 1.

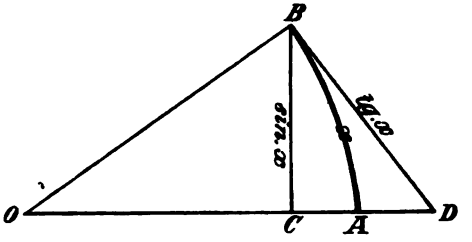

Fig. 1.

Zum Beweise beachte man, daß für alle Bögen x, welche kleiner als $\frac{\pi}{2}$ (d. h. kleiner als 90 Grad) sind, in Figur 1:

$$\Delta\,OCB \leqq \text{Sektor}\,AOB \leqq \Delta\,OBD$$

wird. Das Gleichheitszeichen ist dabei nur zu nehmen, wenn der Bogen AB gleich Null wird. Macht man den Halbmesser des Kreises um O gleich 1, so ist:

$$2\,\text{mal}\,\Delta\,OCB = CB \cdot CO = \sin x \cdot \cos x$$
$$2\,\text{mal Sektor}\,AOB = (\text{Bogen}\,AB)\,\text{mal}\,AO = x$$
$$2\,\text{mal}\,OBD = OB \cdot BD = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Folglich geht die obige Vergleichung über in:

$$\sin x \cos x \leqq x \leqq \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\sin x$, so erhält man:

$$\cos x \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{1}{\cos x}.$$

Nimmt man in dieser Umgleichung überall die reziproken Werte, so erhält man:

$$\frac{1}{\cos x} \geqq \frac{\sin x}{x} \geqq \cos x,$$

d. h. $\frac{\sin x}{x}$ liegt immer zwischen $\cos x$ und $\frac{1}{\cos x}$. Da nun

aber $\lim_{x=0} \cos x = 1$ und $\lim_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1$ wird, so muß auch $\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x}$ gleich 1 werden.

Wenn eine veränderliche Größe immer größere und größere Werte annimmt, so daß sie jede gegebene Größe übersteigen kann, so sagt man, sie werde unendlich groß oder sie sei eine unbegrenzt wachsende Größe. Das Zeichen für unendlich groß ist:

$$\infty \text{ oder } +\infty.$$

Wenn man also von „unbegrenzt wachsenden“ oder von unendlich großen Zahlen spricht, so will man damit ein Grenzverfahren (ein „je — desto“) andeuten, das darin besteht, daß man zunächst mit endlichen, aber veränderlichen Zahlen rechnet, die dann aber größer werden dürfen, als jede noch so große Zahl. So drückt:

$$\lim_{x=90^0} \operatorname{tg} x = \infty$$

aus, daß, wenn der Winkel x, größer werdend, sich dem Winkel 90^0 nähert, tg immer größer wird, und zwar dergestalt, daß, wenn man nur $x < 90^0$, aber nahe genug an 90^0 annimmt, man es erreichen kann, daß $\operatorname{tg} x$ größer als jede noch so große vorgeschriebene Zahl wird. Man überlege sich hiernach die Richtigkeit der folgenden Wahrheiten, wo immer a eine unveränderliche, bestimmte Zahl bedeutet:

1) $\lim_{x=\infty} (x + a) = \infty;$

2) $\lim_{x=\infty} (x - a) = \infty;$

3) $\lim_{x=\infty} (x \cdot a) = \infty;$

4) $\lim_{x=\infty} \frac{x}{a} = \infty;$

5) $\lim_{x=\infty} \frac{a}{x} = 0;$

6) $\lim_{x=0} \frac{a}{x} = \infty.$

Wenn der absolute Betrag einer negativen veränderlichen Größe unbegrenzt wächst, so nennt man den Grenzwert:

$$-\infty$$

(gelesen „minus unendlich"). Hiernach gilt, wenn a eine endliche Zahl bedeutet, die Umgleichung:

$$-\infty < a < +\infty.$$

Ferner gilt für jede Zahl a, die nicht unendlich groß ist:

$$\lim_{x=\infty} a - x = -\infty.$$

Ehe der Begriff des Unendlichgroßen eingeführt war, kannten wir nur einen einzigen aus den Rechnungsarten erster und zweiter Stufe stammenden Ausdruck, der gleich jeder beliebigen Zahl gesetzt werden durfte:

$$0 : 0.$$

Mit Hilfe des Zeichens ∞ lassen sich nun noch drei weitere von solchen vieldeutigen Ausdrücken zusammensetzen, nämlich, wie aus den obigen Nummern 1) bis 5) hervorgeht:

$$\frac{\infty}{\infty},\quad 0 \cdot \infty,\quad \infty - \infty.$$

In jedem besonderen Falle hat jeder dieser Ausdrücke natürlich einen bestimmten Wert, der davon abhängt, in welcher Weise eine veränderliche Größe verschwindend klein wird, bezw. größer als jede noch so große Zahl wird. So hat, wie aus dem obigen Beispiel hervorgeht,

$$\frac{0}{0} \text{ den bestimmten Wert } 1,$$

wenn die Null des Nenners der Grenzwert eines immer kleiner werdenden Bogens ist, und die Null des Zählers der Grenzwert der zugehörigen Sinus-Strecke ist. (Vgl. oben.)

Zu den erhaltenen vier unbestimmten Ausdrücken:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty - \infty$$

treten durch die Rechnungsarten dritter Stufe noch drei weitere hinzu, nämlich:

$$0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

Um einzusehen, daß auch diese drei Ausdrücke vieldeutig sind, beachte man die folgenden, aus den Gesetzen der Logarithmierung folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x=1} \overset{b}{\log} x = 0;$$

$$\lim_{x=\infty} \overset{b}{\log} x = \infty;$$

$$\lim_{x=0} \overset{b}{\log} x = -\infty;$$

wobei b beliebig, aber größer als 1 ist.

Hieraus folgt dann, daß

$$1^{\infty} = b^{\infty \overset{b}{\log} 1} = b^{\infty \cdot 0}$$

vieldeutig sein muß. Ebenso erkennt man die Vieldeutigkeit von ∞^0 aus:

$$\infty^0 = b^{0 \cdot \overset{b}{\log} \infty} = b^{0 \cdot \infty},$$

und die Vieldeutigkeit von 0^0 aus:

$$0^0 = b^{0 \cdot \overset{b}{\log} 0} = b^{0 \cdot (-\infty)} = b^{-(0 \cdot \infty)}.$$

Es erwächst nun der Mathematik die Aufgabe, die Grenzwerte zu bestimmen, zu welchen solche unbestimmten Ausdrücke führen, wenn die in diesen Ausdrücken auftretenden Zahlen

$$0,\ 1,\ \infty$$

auf ganz bestimmte Weise aus veränderlichen Größen entstehen.*)

Bei der Veränderlichkeit einer Größe x ist bisher immer nur daran gedacht, daß x alle denkbaren rationalen und irrationalen Zahlenwerte durchläuft, so daß in dem Intervall zwischen $x = a$ und $x = b$, wo $b > a$ ist, noch unendlich viele Zahlenwerte zu denken sind, von denen jeder größer als a, kleiner als b ist. Es ist jedoch nicht immer nötig, daß die veränderlich gedachte Größe x alle denkbaren Zahlenwerte durchläuft, sie kann vielmehr auch sprungweise sich ändern, etwa so, daß jeder neue für x zu denkende Zahlenwert um c größer ist, als der vorangehende, oder auch so, daß die für x zwischen $x = a$ und $x = b$ zu denkenden Zahlen-

*) Vgl. in dieser Sammlung Bd. X, § 17.

werte erst um c, dann um 2 c, dann um 3 c u. s. w. größer werden, oder nach irgend einem andern Gesetze sich ändern. Insbesondere kommt es vor, daß die veränderliche Größe x nur die natürliche Reihe der Zahlen durchläuft, d. h. nacheinander $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ u. s. w. zu denken ist. Namentlich ist dies der Fall, wenn x ein Zähl-Ergebnis ist, also etwa die Anzahl der Glieder einer gesetzmäßig gebildeten Reihe von Zahlen. Beispielsweise kann man bei der Reihe:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots,$$

d. h. der Reihe der reziproken Werte der natürlichen Zahlen, fragen, welchem Grenzwert die n-te Zahl, die doch gleich $\frac{1}{n}$ ist, zustrebt, wenn n unbegrenzt wächst. Man muß dann in $\frac{1}{x}$ für x sprungweise die Werte 1, 2, 3 u. s. w. einsetzen, braucht also für x nicht alle zwischen zwei ganzen Zahlen liegenden Zahlenwerte einzusetzen, um zu erkennen, daß bei unbegrenzt wachsendem n die n-te Zahl der obigen Reihe verschwindend klein wird, also den Grenzwert Null hat. Weiteres über Grenzwerte findet man in § 4 und § 9.

Übungen zu § 2.

Auf einer geraden Linie liegen zwei Punkte O und E, welche beziehungsweise die Zahlen 0 und 1 abbilden. Bestimme den Punkt, welcher abbildet die Zahl:

1) 5; 2) -3; 3) $+3\frac{3}{4}$; 4) $-2\frac{1}{2}$; 5) $+\sqrt{3}$; 6) $-\sqrt{5}$; 7) $1+\sqrt{2}$; 8) $2-\sqrt{2}$; 9) $\log^{10} 2$; 10) $\sqrt[3]{3}$; 11) π; 12) $\sqrt{5-\sqrt{5}}$.

Wenn x alle Zahlenwerte von 0 bis 10 durchläuft, welche Zahlenwerte durchläuft dann:

13) x^2? 14) $x^2 - 9x$? 15) $\sqrt{x}$? 16) $\frac{1}{x+1}$? 17) $\log^{10}(x+3)$? 18) 2^x?

19) Welcher Grenze nähert sich $\frac{1}{5-x}$, wenn x sich der Zahl 4 nähert?

20) Welcher Grenze nähert sich $(3-x)^2$, wenn x sich der Zahl 3 nähert: a) von oben? b) von unten?

21) Wieviel Addenden der Summe $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}$ u.s.w. muß man addieren, um zu erreichen, daß die Summe sich um weniger als ein Zehntausendstel von $\frac{1}{3}$ unterscheidet?

22) Welcher Grenze nähert sich $7-x$, wenn x von 6 an sich der Zahl 7 nähert?

23) Welcher Grenze nähert sich 5^x, wenn x verschwindend klein wird?

24) Welcher Grenze nähert sich $\frac{x^3-1}{x-1}$, wenn x sich der Zahl 1 nähert?

25) Welcher Grenze nähert sich $\frac{x\cos x}{\sin x}$, wenn x verschwindend klein wird?

26) Welcher Grenze nähert sich $\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$, wenn x verschwindend klein wird?

27) Welcher Grenze nähert sich $3^{\frac{\sin x}{x}}$, wenn x verschwindend klein wird?

28) Welchem Grenzwert nähert sich $\frac{7}{x}$, wenn x größer wird, als jede noch so große Zahl?

29) Welchem Grenzwert nähert sich $\frac{7x+4}{5x-3}\left[=\frac{7+\frac{4}{x}}{5-\frac{3}{x}}\right]$, wenn x unbegrenzt wächst?

30) Was wird aus $\frac{9x^2-5x+2}{3x^2+4x+1}$, wenn x unendlich groß wird?

31) Was wird aus $7+\frac{3}{x}$, wenn x verschwindend klein wird?

32) Was wird aus $5-\frac{2}{x}$, wenn x verschwindend klein wird?

33) Was wird aus $19+\frac{1}{x-5}$, wenn x sich der Zahl 5 von oben nähert?

34) Was wird aus $13x^3$, wenn x unbegrenzt wächst?

35) Welcher Grenze nähert sich der Quotient $\frac{1}{x-3} : \frac{1}{x^2-9}$, wenn x sich der Zahl 3 nähert?

36) Welcher Grenze näher sich $\frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1}$, wenn x sich der Zahl 1 nähert?

37) Welcher Zahl nähert sich $\frac{5}{4x+7}$, wenn x unbegrenzt wächst?

38) Berechne: $\lim_{x=4} \frac{1}{x-4} \cdot (x^2-16)$.

39) Berechne: $\lim_{x=7} 9^{7-x}$.

40) Wie verändert sich tg x, wenn x das Intervall von 0 bis π durchläuft?

41) Was bedeutet $\lim_{x=\infty} \sqrt{x} = \infty$?

42) Warum muß die Definition des Begriffs „veränderliche Größe" der Definition des Begriffs „unendlich groß" oder „unendlich klein" vorangehen?

43) Welcher Zahl nähert sich $(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x}} = 10^{\frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{2} \log x}$, wenn x sich der Zahl 1 nähert und 10 die Basis des Logarithmensystems ist?

44) Welcher Zahl nähert sich $(x^2-2x+1)^{\frac{1}{\log(x-1)}}$, wenn x sich der Zahl 1 nähert? (Vgl. die eckige Klammer in Nr. 43).

45) Wann ist $\lim_{x=0} \frac{1}{x} = +\infty$ und wann ist $\lim_{x=0} \frac{1}{x} = -\infty$?

46) Der reziproke Wert der ersten ungeraden Zahl ist $\frac{1}{1} = 1$, der zweiten ungeraden Zahl $\frac{1}{3}$, der n-ten $\frac{1}{2n-1}$. Warum muß man n sich sprungweise ändern lassen, wenn man untersuchen will, welchem Grenzwert der reziproke Wert der n-ten ungeraden Zahl bei unbegrenzt wachsendem n zustrebt?

§ 3. Begriff der Funktion.

Wenn zwei veränderliche (§ 2) Größen x und y durch eine Gleichung miteinander verknüpft sind, so werden sie dadurch von einander abhängig, indem zu jedem Werte der einen Variabeln ein Wert oder mehrere Werte der andern Variabeln gehören. Wenn z. B.:

$$x(x+8)=y+33$$

eine Gleichung zwischen den beiden Variabeln x und y ist, so gehört zu jedem Werte von x ein Wert der Variabeln y, d. h., wenn man diese beiden Werte für x und y in die Gleichung einsetzt, so wird die Gleichung richtig. Beispielsweise gehört zu $x=0$, $y=-33$, zu $x=1$, $y=-24$, zu $x=2$, $y=-13$, zu $x=3$, $y=0$, zu $x=4$, $y=15$ u. s. w. Man kann auch für x eine positive oder negative gebrochene oder irrationale Zahl einsetzen, immer wird es eine Zahl y geben, welche die Gleichung richtig macht. Setzt man z. B. $x=4\sqrt{2}$, so erhält man, daß $y=32\sqrt{2}-1$ sein muß, damit jene Gleichung erfüllt wird. Wenn man aber umgekehrt für y einen Wert einsetzt, etwa $y=15$, so erhält man für x immer zwei Werte, nämlich für $y=15$ sowohl $x=+4$ als auch $x=-12$. Setzt man $y=0$, so erhält man außer $x=3$ auch $x=-11$. Jede der beiden durch eine Gleichung verbundenen Variabeln kann man als die unabhängige Veränderliche betrachten, dann ist immer die andere die abhängige Veränderliche. Im obigen Beispiele wurde zuerst x und dann y als unabhängige Veränderliche betrachtet. Die abhängige Variable nennt man auch eine Funktion der unabhängigen Variabeln. Meist ist die Art der Abhängigkeit der einen Variabeln von der andern durch eine Gleichung ausgedrückt oder ausdrückbar. Doch ist dies nicht gerade notwendig. Man nennt eine Variable y auch dann eine Funktion von der Variabeln x in dem Intervalle (§ 2) von $x=a$ bis $x=b$, wenn in diesem Intervalle jedem Werte von x ein Wert von y oder mehrere Werte von y gesetzmäßig zugeordnet sind. Beispielsweise nennt man y auch eine Funktion von x, wenn y etwa die Anzahl der Primzahlen bedeutet, die kleiner als x ist. Derartige gesetzmäßige Zuordnungen, die nicht durch eine einfache Gleichung zwischen x und y ausdrückbar sind, werden jedoch hier in

der „Niederen Analysis“ nicht in Betracht gezogen. Wir werden vielmehr nur solche Funktionen betrachten, in denen y durch eine Gleichung von x abhängt. Beispielsweise sind Peripherie und Fläche eines Kreises Funktionen des Radius. Dabei ist der Radius als Veränderliche betrachtet. Man kann jedoch auch den Radius als Konstante ansehen, z. B., wenn man in einem und demselben Kreise die Länge einer Sehne als Funktion des der Sehne zugehörigen Zentriwinkels auffaßt. Es liegt nahe, den Begriff der Funktion auch auf Abhängigkeiten zu übertragen, die außerhalb der reinen Mathematik liegen. So kann man in der Elektrizität bei konstanter Spannung die Stromstärke eine Funktion des Widerstandes nennen, in der Optik den Lichteffekt einer Flamme eine Funktion der Entfernung, in der Technik die Spannkraft des Dampfes eine Funktion der Temperatur, in der Assekuranz die Höhe der Leibrente eine Funktion des Lebensalters beim Beginn der Versicherung, in der Volkswirtschaft die Kurshöhe eine Funktion des Geldangebots u. s. w. Dabei müssen dann immer alle übrigen in Betracht kommenden Größen als konstant angesehen werden. Freilich kann man auch eine Variable als Funktion von zwei unabhängigen Variablen auffassen. Es ist z. B. y, wenn $y = x^z$ ist, gleichzeitig abhängig von der Basis x, wie vom Exponenten z, oder es ist der galvanische Effekt abhängig sowohl von der Stromspannung wie auch von der Stromstärke.

Wenn in der Gleichung, welche die Abhängigkeit der Variabeln y von der Variabeln x ausdrückt, die eine Seite y heißt, während die andere Seite nur x enthält, so nennt man y eine entwickelte Funktion von x. Wenn aber die Gleichung zwischen x und y nicht nach y aufgelöst ist, so heißt die Funktion unentwickelt. Häufig kann man in diesem Falle die Gleichung nach y auflösen, und so zu einer entwickelten Funktion gelangen. So folgt beispielsweise aus der unentwickelten Funktion:

$$y^2 - 8xy + 4ya + 9x^2 = bx$$

die entwickelte:

$$y = 4x - 2a \pm \sqrt{7x^2 - 16xa + 4a^2 + bx}$$

oder aus: $y^x + x^5 = \operatorname{tg} x$

die entwickelte Funktion:

$$y = \sqrt[x]{\operatorname{tg} x - x^5}.$$

Wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist, so soll unter „Funktion“ schlechthin immer eine entwickelte verstanden werden. Eine solche Funktion heißt **algebraisch**, wenn in ihr x und konstante Zahlen nur durch die Operationen der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation, der Division, sowie der Potenzierung und Radizierung mit ganzzahligen Exponenten verknüpft sind. Wenn dies **nicht** der Fall ist, nennt man die Funktion **transzendent**. Beispielsweise sind algebraische Funktionen die folgenden:

$$y = \left(x^4 + \sqrt[3]{x} - 7x\sqrt{x}\right) : \sqrt[5]{x^4},$$

$$y = \frac{x^4 - 4}{x - 1} - 9x,$$

$$y = \sqrt[5]{x^5 + \sqrt{x} - \frac{1}{x}}.$$

Dagegen sind transzendent:

$$y = \cos x,\ y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x},\ y = a^x;\ y = x^{\sin x},\ y = \sqrt[x]{a} + \sqrt[x]{b},$$

$$y = a\sin x + b\cos x;\ x = a^{\sqrt{x}} - x^4 + \sin x - \operatorname{tg}^3 x.$$

Unter den algebraischen Funktionen sind besonders wichtig die **rationalen Funktionen**, die entweder **gebrochene** oder noch spezieller **ganze Funktionen** sein können. Eine **ganze Funktion** ist eine Funktion von der Form:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_{n-1} x + a_n,$$

wo n eine ganze Zahl ist und wo a_0, a_1, a_2, ... a_n konstante Zahlen sind. Eine rationale Funktion heißt **gebrochen**, wenn sie als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellbar ist.

Wenn man bei einer Funktion der unabhängigen Variabeln x viele Werte erteilt und für jeden Wert von x den zugehörigen Wert von y bestimmt, so erhält man eine Tabelle für die betreffende Funktion. Für Funktionen, die mühsam zu berechnen sind, hat man solche Funktionstabellen übersichtlich zusammengestellt, indem man der Reihe nach die Werte von x gleich den aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gesetzt oder sonstwie gesetzmäßig angeordnet hat, und die zugehörigen Funktionswerte daneben angegeben hat. Von solchen Funktionstabellen sind am bekanntesten die

Logarithmentafeln, aus denen für die Basis zehn die Logarithmen aller Zahlen von Eins bis 10^4 oder 10^5 auf vier, fünf, sieben oder noch mehr Dezimalstellen entnommen werden können.*)

Außer durch eine solche Funktionstabelle kann man auch durch graphische Abbildung sich ein Bild von dem Verlauf einer Funktion verschaffen. Die graphische Abbildung einer Funktion bewerkstelligt man, indem man auf einer horizontalen Achse Punkte annimmt, die den Werten der unabhängigen Variabeln x entsprechen, und in den Punkten auf der Achse Lote errichtet, auf welche man nach oben oder nach unten Strecken abträgt, die den zugehörigen Funktionswerten entsprechen, nach oben, wenn der Funktionswert positiv ist, nach unten, wenn er negativ ist. Eine Linie, die durch alle so gefundenen Abtragungsendpunkte hindurchgeht, gibt dann ein Bild der abgebildeten Funktion. Auf solche Weise ist die Figur 2 entstanden, welche die Funktion

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

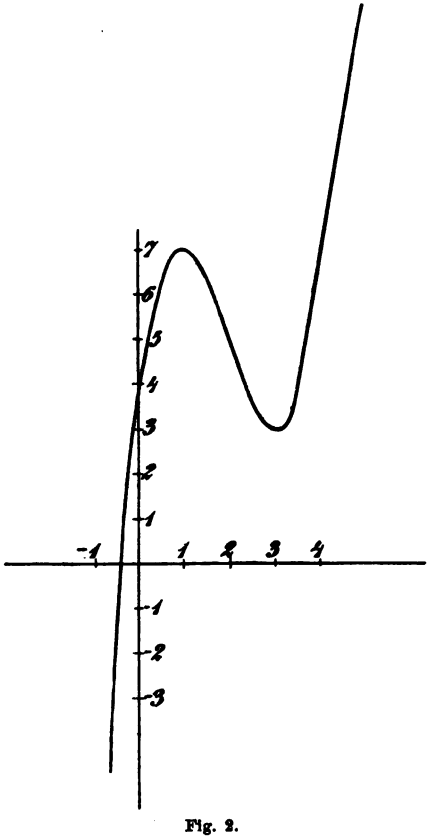

Fig. 2.

abbildet. Für $x = 0$ kommt $y = 3$, für $x = 1$ kommt $y = 7$, für $x = 2$ kommt $y = 5$, für $x = 3$ kommt $y = 3$ u. s. w. Um den Lauf der Funktion zwischen zwei aufeinanderfolgenden

*) Vgl. hier § 14.

ganzzahligen Werten möglichst genau zu erkennen, wird man auch gern für x dazwischen liegende gebrochene Zahlenwerte annehmen. So erhält man $y = 3\frac{5}{8}$ für $x = 2\frac{1}{2}$. Es steht auch nichts im Wege, die zu irrationalen Werten von x zugehörigen Funktionswerte von x zu berechnen und abzubilden.

Man erkennt aus der Figur, daß die abgebildete Funktion zwischen $x = -1$ und $x = 0$ Null wird, nachdem sie vor $x = -1$ negativ war, daß sie dann von $x = 0$ bis $x = 1$ weiter zunimmt, bei $x = +1$ ein Maximum von $y = 7$ erreicht, weiterhin aber zwischen $x = +1$ und $x = +3$ abnimmt, um bei $x = +3$ ein Minimum von $y = +3$ zu erreichen, und daß sie endlich von $x = +3$ an bei wachsendem x andauernd zunimmt.

Wenn, wie bisher immer, y als Funktion von x dargestellt ist, so ist umgekehrt x auch eine Funktion von y, nur daß es nicht immer leicht ist, diese Funktion in entwickelter Form anzugeben. Wenn $y = x^n$ ist, so ist $x = \sqrt[n]{y}$; wenn aber y eine allgemeinere ganze Funktion von x ist, wie etwa die oben abgebildete Funktion, so läuft das Problem der Umkehrung, d. h. das Problem, x als Funktion von y darzustellen, darauf hinaus, eine Gleichung höheren Grades zu lösen. Wenn $y = b^x$ ist, so ist schon in der „Elementaren Arithmetik“*) die Funktion, welche x abhängig von y darstellt, durch besondere Zeichen dargestellt und ausführlich behandelt. Die Umkehrung von $y = b^x$ lautet nämlich:

$$x = \log y \text{ zur Basis } b.$$

Was die von der Trigonometrie**) gelieferten Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ anbetrifft, so ist zunächst daran zu erinnern (vgl. § 2), daß man sich dabei in der Analysis unter x nicht einen in Graden, Minuten und Sekunden gegebenen Winkel vorzustellen hat, sondern das Verhältnis des Bogens, dessen Zentriwinkel ein solcher Winkel ist, zum Radius dieses Kreisbogens. Man sagt also in der Analysis statt 360 Grad $\frac{2r\pi}{r} = 2\pi$, statt 180 Grad π, statt 90 Grad

*) § 32 von Bd. I dieser Sammlung.
**) Bd. III dieser Sammlung.

$\frac{\pi}{2}$, statt 30 Grad $\frac{\pi}{6}$, statt 1 Grad $\frac{\pi}{360}$ u. s. w. Wenn also in $\sin x$ die unabhängige Variable x gleich $\frac{1}{10}$ gesetzt wird, so bedeutet $\sin x$ den Sinus desjenigen Zentriwinkels, bei welchem der Bogen gleich dem zehnten Teil des Radius ist. Da bei 360 Grad $x = 2\pi$ ist, so ist $x = 1$ bei $\frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi}$, also $x = \frac{1}{10}$ bei $\frac{180^0}{10\pi}$. Der zu $x = \frac{1}{10}$ gehörige Winkel würde also in Graden $\frac{180^0}{20 \cdot \frac{22}{7}}$ betragen, wenn π näherungsweise gleich $\frac{22}{7}$ gesetzt wird, oder etwa $5\frac{8}{11}$ Grade. Beispielsweise ist: $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos 2\pi = -1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = +1$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Statt „Verhältnis des Bogens zum Radius" darf man auch schlechthin „Bogen" sagen, wenn man sich den Radius immer gleich Eins gesetzt denkt. Man sagt also kurz „Sinus des Bogens x" statt $\sin x$ und denkt stillschweigend dazu: „in einem Kreise vom Radius Eins".

Für die Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x$$

sind in der Analysis beziehungsweise die Zeichen:

$$x = \arc \sin y, \quad x = \arc \cos y, \quad x = \arc \operatorname{tg} y, \quad x = \arc \operatorname{cotg} y$$

gebräuchlich. Diese Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen nennt man kyklometrische.

$$x = \arc \sin y,$$

gelesen: x gleich „Arcus Sinus y"

bedeutet also, daß x der Bogen ist, dessen Sinus y ist. Analog bedeutet $x = \arc \operatorname{cotg} y$, daß x der Bogen ist, dessen Cotangens y ist. Da, wenn x von 0 bis 2π wächst, jede der trigonometrischen Funktionen zweimal einen und denselben Wert bekommt, und da sie auch immer wieder denselben Wert bekommt, wenn x weiterhin um beliebig viele Vielfache von 2π wächst, so müssen bei jeder der Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen einem und denselben Werte von y beliebig viele Werte von x zugehören. Man meint jedoch, wenn

nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist, immer nur einen einzigen Wert von x, und zwar denjenigen, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt und der kleinste unter allen positiven Werten von x ist. Beispielsweise ist also:

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2},\quad \arccos \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\pi}{4},\quad \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4},\quad \operatorname{arc\,cotg}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}.$$

Übungen zu § 3.

Stelle aus den folgenden Gleichungen y als Funktion von x her:

1) $x^3 + y\,x^2 - 7\,x + y = 0$; 2) $5\,x + 8 - x^2 = y^2$;
3) $\sin x - a^x\,y + \log x = 0$; 4) $x^x + y\,x^2 = 100$.

Die abhängige Variable y soll als Funktion von x hergestellt werden bei:

5) $y^2 = 9\,x^2 - 7$; 6) $5\,x^2 - y\,x^3 = 7$;
7) $y^2 + x\,y - 2\,x^2 = 0$; 8) $x^y = 100$; 9) $y^x = 100$;
10) $4^x \sin x + \cos x \cdot y = 0$.

Welche von den folgenden Funktionen von x sind algebraisch und welche transzendent:

11) $y = \frac{x^4 - 1}{x + 2}$? 12) $y = \sqrt[3]{x^3 + 27}$? 13) $y = a^x + b^x + c^x$?
14) $y = \cos^2 x - \cos x$? 15) $y = \frac{7\,x^5 - 1}{x^9 + 1} - x^4$?

Verwandele in den Quotienten zweier ganzer Funktionen:

16) $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} + \frac{x}{x^2-9}$; 17) $\frac{x^2+4}{x^5-1} - \frac{1}{x^3-1}$;

18) $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-5}}{\frac{x^2}{x^4-1} + \frac{1}{x^2-1}}$; 19) $\dfrac{\frac{4}{x+1} - \frac{5}{x+2}}{2x+3} + \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x+3}$.

Stelle eine Tabelle der folgenden Funktionen so her, daß x gleich einer der ganzen Zahlen von 1 bis 10 ist:

20) $\frac{1}{x}$; 21) $\sqrt{x}$; 22) $\overset{10}{\log} x$; 23) 2^x; 24) $x^3 - 3x$;

25) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$; 26) $x - \sqrt[3]{x}$; 27) $\sqrt[x]{2}$; 28) $\sqrt[x]{x}$.

Bilde die folgenden Funktionen graphisch ab:

29) $y = x^3 - 5x$; 30) $y = x^2 - 6x + 5$; 31) $y = \sqrt[3]{x}$;

32) $y = \frac{1}{x}$; 33) $y = \overset{10}{\log} x$; 34) $y = x^4 - 2x^2 + 5x - 4$.

Entwickele aus den folgenden Gleichungen y als Funktion von x und entscheide, ob diese Funktion algebraisch oder transzendent ist:

35) $\frac{y}{x} = Ax^3 + Bx$; 36) $(y - a)(x^2 + ax + b) = 0$;

37) $7 = \sqrt[x]{y}$; 38) $\frac{4}{xy} + \sqrt{x} = 13$; 39) $\overset{10}{\log} y = \sin x$;

40) $Ay^2 + By = Cx$.

Entscheide, ob in den folgenden Gleichungen y als rationale oder irrationale Funktion von x erscheint:

41) $y(ax^2 + bx + c) = x^3$; 42) $y^2 + y = x$;

43) $y^5 = (x - a)(x - b)$; 44) $y(5 + x) = \frac{1}{x+1} - \frac{y}{x}$;

45) $y\sqrt[3]{x} + y^2\sqrt[5]{x} = x$; 46) $\frac{3y-5}{x+1} - \frac{y-1}{x-1} = \frac{4y+7}{x^2-1}$;

47) $y + \sqrt[3]{y} = x$.

48) Beweise, daß die Verknüpfung von rationalen Funktionen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung und Radizierung mit ganzzahligen Exponenten wieder zu rationalen Funktionen führt.

Verwandele in ganze Funktionen von x:

49) $(x-a)^6$; 50) $\frac{16x^4-1}{2x+1}$; 51) $\frac{x^2+1-\frac{1}{x+1}}{1:\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;

52) $\frac{x^2+4x+4}{x+2}+\frac{x^8-1}{x^2+1}$.

53) Beweise, daß man aus ganzen Funktionen durch Addition, Subtraktion und Multiplikation immer wieder ganze Funktionen gewinnt.

54) Es ist $y=\sqrt[3]{b^x}$. Drücke umgekehrt x durch y aus.

Stelle durch eine Kurve dar:

55) $y=\sin x$; 56) $y=\operatorname{tg} x$; 57) $y=\operatorname{tg} x-x$; 58) $y=\frac{1}{\cos x}$.

Warum ist:

59) $\operatorname{arc\,sin} x=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,cos} x$? 60) $\operatorname{arc\,cotg} x+\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{2}$?

Berechne:

61) $\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{2}$; 62) $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 63) $\operatorname{arc\,tg} 1$; 64) $\operatorname{arc\,tg}(-1)$.

65) Zeichne die Kurve der Temperaturen im Laufe eines Jahres aus den für Berlin gültigen, auf die 12 Monate bezüglichen Durchschnitts-Temperaturen in Celsius-Graden, nämlich: Januar: $-1{,}3$; Februar: $+0{,}6$; März: $+3{,}3$; April: $+8{,}4$; Mai: $+13{,}6$; Juni: $+17{,}2$; Juli: $+18{,}6$; August: $+18{,}0$; September: $+14{,}3$; Oktober: $+9{,}0$; November: $+3{,}8$; Dezember: $+0{,}9$.

66) Wer ist die unabhängige Variable bei den Barometerkurven, wie man sie in den Schaufenstern der Optiker sieht?

---

§ 4. Besondere Grenzwerte.

I) $\lim\limits_{u=0}\frac{(1+u)^m-1}{u}=m$;

II) $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1$;

III) $\lim\limits_{x=0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Zwar ist der Begriff des Grenzwerts schon in § 2 im Anschluß an den Begriff der Veränderlichkeit entwickelt. Auch sind dort schon einige Beispiele von Grenzwerten erörtert. Hier sollen nun noch eine Reihe von Grenzwerten besprochen werden, die für den II. Abschnitt wichtig sind.

1) Um den Grenzwert von $\frac{y^p - y^p}{x^q - y^q}$ für $x = y$ zu finden, wo p und q positive ganze Zahlen sind, benutzen wir den ersten der drei in § 15 von Band I dieser Sammlung ausgesprochenen Sätze, wodurch wir erhalten:

$$\frac{x^p - y^p}{x^q - y^q} = \frac{(x-y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1})}{(x-y)(x^{q-1} + x^{q-2}y + \ldots + y^{q-1})}.$$

Dividiert man nun rechts Zähler und Nenner durch $x - y$, so erhält man:

$$\frac{x^p - y^p}{x^q - y^q} = \frac{x^{p-1} + x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 + \ldots + y^{p-1}}{x^{q-1} + x^{q-2}y + x^{q-3}y^2 + \ldots + y^{q-1}}.$$

Setzt man nun $x = y$, so erhält man rechts im Zähler p Addenden, die sämtlich gleich x^{p-1} sind, im Nenner q Addenden, die sämtlich x^{q-1} sind. Also wird:

$$\lim_{x=y} \frac{x^p - y^q}{x^q - y^q} = \frac{p\,x^{p-1}}{q\,x^{q-1}} = \frac{p}{q} \cdot x^{p-q}.$$

Beispielsweise sei $p = 3$, $q = 2$, $y = 4$. Dann kommt:

$$\lim_{x=4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 16} = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6.$$

Nähern wir uns dem Werte $x = 4$ von oben, so erhalten wir für $x = 5$: $\frac{125 - 64}{25 - 16} = 6\frac{7}{9}$, ferner für $x = 4\frac{1}{10}$: $\frac{68{,}921 - 64}{16{,}810 - 16} = 6{,}075$, woraus wir auch empirisch erkennen, daß der Ausdruck $\frac{x^3 - 64}{x^2 - 16}$ um so mehr sich dem Werte 6 nähert, je mehr x sich der Zahl 4 nähert.

2) Dem in 1) behandelten Grenzwert kann man eine andere Form geben, wenn man $x = \sqrt[q]{v} = v^{\frac{1}{q}}$ und $y = \sqrt[q]{w} = w^{\frac{1}{q}}$ setzt. Dadurch kommt:

$$\lim_{v=w} \frac{v^{\frac{p}{q}} - w^{\frac{p}{q}}}{v - w} = \frac{p}{q} \cdot w^{\frac{1}{q}(p-q)} = \frac{p}{q} \cdot w^{\frac{p}{q}-1}.$$

Setzt man endlich noch $v = 1 + u$, $w = 1$, so daß aus $v = w$, $u = 0$ wird, so erhält man:

$$\lim_{u=0} \frac{(1+u)^{\frac{p}{q}} - 1}{u} = \frac{p}{q} \cdot 1^{\frac{p}{q}-1} = \frac{p}{q}.$$

Da nach § 1 zwei irrationale Zahlen nur eine und dieselbe Zahl darstellen, wenn sie immer zwischen denselben rationalen Grenzen bleiben, auch wenn deren Unterschied beliebig klein wird, und da ferner $\frac{p}{q}$ jede beliebige positive rationale Zahl darstellt, so ergibt unser Grenzwert auch:

$$\lim_{u=0} \frac{(1+u)^m - 1}{u} = m,$$

wo m eine beliebige positive rationale oder irrationale Zahl bedeutet.

3) Aus dem Schlußresultat von Nr. 2 kann man auch schließen, daß

$$\lim_{u=0} \frac{(1+u)^{-m} - 1}{u} = -m$$

ist, wenn m eine beliebige positive, also $-m$ eine beliebige negative Zahl bedeutet. Denn:

$$\frac{(1+u)^{-m} - 1}{u} = \frac{\frac{1}{(1+u)^m} - 1}{u}$$

$$= \frac{1 - (1+u)^m}{u(1+u)^m} = -\frac{(1+u)^m - 1}{u} \cdot \frac{1}{(1+u)^m},$$

welcher Ausdruck, wenn u sich der Null nähert, nach 2) sich $-m$ nähert. Demnach ist:

$$\lim_{u=0} \frac{(1+u)^m - 1}{u} \text{ immer gleich m,}$$

gleichviel ob m eine positive oder negative Zahl bedeutet.

4) Bei dem Grenzwert von a^x, wo a konstant und x variabel ist, muß man unterscheiden, ob a gleich 1, größer oder kleiner als 1 ist. Wenn $a = 1$ ist, so behält a^x stets denselben Wert, wie groß auch x werden mag. Wenn ferner $a > 1$ ist, so muß a^x immer größer werden, wenn x größer wird. Denn wenn b die positive Zahl ist, um welche a größer als 1 ist, so daß also $a = 1 + b$ ist, so folgt aus:

$$(1+b)^{n+1} - (1+b)^n = (1+b)^n(1+b-1) = b(1+b)^n,$$

daß, wenn x um 1 wächst, der Wert von a^x um die Zahl $(a-1)a^x$ größer wird, also um einen positiven Betrag. Wenn man also nur x groß genug annimmt, so ist es erreichbar, daß, falls $a > 1$ ist, a^x größer wird, als jede noch so große Zahl. Dies schreiben wir aber kurz so:

$$\lim_{x=\infty} a^x = \infty, \text{ falls } a > 1.$$

Wenn ferner a kleiner als 1, aber positiv ist, so ist $\frac{1}{a}$ größer als Eins, und wir können setzen:

$$a^x = \left(1 : \frac{1}{a}\right)^x = 1 : \left(\frac{1}{a}\right)^x,$$

und da, nach dem Vorigen, nunmehr $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ bei wachsendem x größer als jede noch so große Zahl wird, und da außerdem nach § 2, Nr. 5:

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{y} = 0$$

ist, so erhalten wir, daß, falls $0 < a < 1$ ist, a^x bei wachsendem x kleiner als jede noch so kleine Zahl wird, also von oben dem Grenzwert 0 zustrebt. Diese Resultate fassen wir folgendermaßen zusammen:

Bei unbegrenzt wachsendem x hat a^x den Grenzwert ∞ oder 0, je nachdem das positive a größer oder kleiner als 1 ist.

5) Schon in § 2 wurde für $x < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

bewiesen, und daraus abgeleitet, daß

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ist. Multiplizieren wir die obige Ungleichung mit $\frac{1}{\cos x}$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\cos^2 x} \geqq \frac{\operatorname{tg} x}{x} \geqq 1,$$

woraus wir, da $\frac{1}{\cos^2 x}$ für $x > 0$ größer als 1 wird, schließen können, daß, wenn x sich von oben der Zahl Null nähert, $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ sich von oben der Zahl 1 nähert. Nehmen wir in der eben erhaltenen Ungleichung überall die reziproken Werte, so müssen wir die Ungleichheitszeichen in die entgegengesetzten verwandeln, und erhalten:

$$\cos^2 x \leqq \frac{x}{\operatorname{tg} x} \leqq 1,$$

also:

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

6) Setzt man in dem soeben in 5) behandelten Grenzwert $\operatorname{tg} x = y$, so haben wir:

$$x = \operatorname{arc\,tg}\, y \text{ (vgl. § 3)}$$

zu setzen, und erhalten:

$$\lim_{y=0} \frac{\operatorname{arc\,tg}\, y}{y} = 1.$$

Übungen zu § 4.

1) Welches ist der Grenzwert von $\frac{x^7 - y^7}{x^4 - y^4}$ für $x = y$?

2) Berechne $\lim_{x=3} \frac{x^4 - 81}{x^3 - 27}$.

3) Berechne $\lim_{x=\frac{1}{2}} \frac{16x^4 - 1}{8x^3 - 1}$.

4) Was wird aus $\frac{64x^6 - 729y^6}{16x^4 - 81y^4}$ für $y = \frac{2}{3}x$?

5) Berechne $\lim \frac{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}{a - b}$ für $a = b$.

6) Berechne $\frac{(1+u)^{\frac{7}{9}} - 1}{u}$ für $u = 0$.

7) Berechne $\frac{(1+u)^{\sqrt{2}} - 1}{u}$ für $u = 0$.

8) Berechne $\frac{x^{-\frac{2}{3}} - y^{-\frac{2}{3}}}{x - y}$ für $x = y$.

9) Berechne $\lim_{u=0} \frac{(1+u)^{-\frac{4}{7}} - 1}{u}$.

10) Was wird aus 3^x für unbegrenzt wachsendes x?

11) Was wird aus $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ für unbegrenzt wachsendes x?

12) Berechne $\lim_{x=\infty} \frac{5 \cdot 3^x - 1}{2 \cdot 3^x - 4} \left[= \lim_{x=\infty} \frac{5 - \frac{1}{3^x}}{2 - \frac{4}{3^x}} \right]$.

13) Berechne $\frac{48 \cdot 9^x - 5^{x+2}}{8 \cdot 9^x + 4^{x+3}}$ für $x = \infty$.

---

14) Welchem Grenzwert nähert sich $\frac{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}{x}$, wenn x verschwindend klein wird?

15) Welchem Grenzwert nähert sich

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 ?$$

16) Welchem Grenzwert nähert sich $\operatorname{cotg} x - \frac{1}{\sin x}$ für verschwindend kleine x?

17) Was wird aus $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}$, wenn x sich der Zahl $\frac{\pi}{2}$ nähert?

18) Was wird aus $\operatorname{tg} x \cdot \cos x$, wenn x sich der Zahl $\frac{\pi}{2}$ nähert?

19) Was ist $\lim_{x=0} \frac{\operatorname{arc\,sin} x}{x}$?

20) Was ist $\lim_{x=0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{arc\,sin} x}$?

21) Was wird aus $\frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}$ wenn $x-y$ verschwindend klein wird?

22) Was wird aus $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, wenn x unendlich klein wird?

---

§ 5. Maxima und Minima.

Veränderungs-Verhältnis einer Funktion y von x zwischen zwei Werten x_1 und x_2 von x, wo $x_1 < x_2$ ist, soll das Verhältnis

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

heißen, wo y_2 und y_1 diejenigen Werte von y sind, die man erhält, wenn man in der Funktion $x = x_2$ bezw. $x = x_1$ setzt. Beispielsweise beträgt 6 das Veränderungs-Verhältnis der in § 3 besprochenen Funktion:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

zwischen den beiden Werten 2 und 5 von x. Denn:

$$\frac{(5^3 - 6\cdot 5^2 + 9\cdot 5 + 3) - (2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 + 3)}{5-2} = \frac{23-5}{5-2} = 6.$$

Aus der graphischen Abbildung (vgl. Figur 2 in § 3) geht hervor, daß das Veränderungs-Verhältnis zwischen zwei Werten von x gleich dem Verhältnisse des Zuwachses der Funktion von x zu dem Zuwachs von x selbst ist, oder, was dasselbe ist, gleich dem Tangens des Winkels, den die Verbindungslinie der beiden den Werten von x zugehörigen Punkte mit der positiven Richtung von links nach rechts bildet. Das Veränderungs-Verhältnis ist also ein Maß für

das Ansteigen der Kurve, welche die Funktion darstellt, zwischen denjenigen beiden Punkten der Kurve, welche den gewählten Werten von x zugehören. Ein negatives Veränderungs-Verhältnis bedeutet, daß, wenn $x_1 < x_2$ ist, der x_1 zugehörige Funktionswert y_1 größer ist, als der x_2 zugehörige Funktionswert y_2. Bei einem negativen Veränderungs-Verhältnis zwischen zwei Punkten der Kurve hat also nicht ein Ansteigen, sondern ein Absteigen, ein Sinken der Kurve stattgefunden.

Wenn man bei dem Veränderungs-Verhältnis zwischen zwei Werten x_1 und x_2 von x den Unterschied von x_2 und x_1 unendlich klein werden läßt, so daß auch der Unterschied zwischen den zugehörigen Funktionswerten unendlich klein wird, so stellt der Grenzwert von

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

das Veränderungs-Verhältnis für den Wert x_1*) von x dar, wofür man auch sagen kann: für den Wert x_2 von x, weil ja x_2 nur um unendlich wenig größer als x_1 ist. In der graphischen Abbildung der Funktion wird dann aus der Verbindungslinie getrennt liegender Punkte der Kurve, die man „Sehne" nennt, die Verbindungslinie aufeinanderfolgender Punkte, die man „Tangente" nennt, und das Veränderungs-Verhältnis für den Wert x_1 wird zum Tangens des Winkels, den die Tangente in dem zu x_1 zugehörigen Kurvenpunkte mit der positiven Richtung bildet. Wenn wir z. B. das Veränderungs-Verhältnis der schon oben als Beispiel gewählten Funktion

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

für die fünf Werte 1, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4 berechnen wollen, so haben wir zu setzen:

$$y_1 = x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1 + 3$$

und:

$$y_2 = x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2 + 3,$$

hieraus zu schließen, daß:

$$y_2 - y_1 = x_2^3 - x_1^3 - 6(x_2^2 - x_1^2) + 9(x_2 - x_1)$$

*) Der Begriff des Veränderungs-Verhältnisses ist der Ausgangspunkt der „Differentialrechnung" (vgl. diese Sammlung, Band X, bearbeitet von Franz Meyer).

ist, woraus nach bekannten Formeln der „Elementaren Arithmetik“ folgt:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) - 6(x_2 + x_1) + 9.$$

Hieraus folgt aber:

$$\lim_{x_2 - x_1 = 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 3x_1^2 - 12x_1 + 9.$$

Hiernach stellt allgemein $3x_1^2 - 12x_1 + 9$ das Veränderungs-Verhältnis der Funktion $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ für jeden Wert x_1 von x dar. Um also die gewünschten fünf Veränderungs-Verhältnisse zu erhalten, haben wir nur nacheinander 1, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4 für x_1 einzusetzen. So erhalten wir:

für $x = 1$: $3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 9 = 0$;
für $x = 2$: $3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$;
für $x = 2\frac{1}{2}$: $3 \cdot (\frac{5}{2})^2 - 12 \cdot \frac{5}{2} + 9 = -2\frac{1}{4}$;
für $x = 3$: $3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 9 = 0$;
für $x = 4$: $3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9$.

Durch Einsetzen von x_1 in die Funktion

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

erhält man die den fünf Werten von x zugehörigen Werte von y, nämlich beziehungsweise:

$$7,\ 5,\ 3\tfrac{5}{8},\ 3,\ 7.$$

Was schon aus dem Anblick der in Figur 2 gezeichneten Kurve hervorgeht, wird uns durch die obige Berechnung der Veränderungs-Verhältnisse bestätigt. Für $x = 1$ ist die Lage der Tangente horizontal, der Funktionswert ist 7, und nun sinkt die Kurve bei wachsendem x, weil das Veränderungs-Verhältnis negativ wird, oder, was dasselbe ist, der Tangens des Winkels, den die Tangente mit der positiven Richtung bildet, negativ wird, der Winkel selbst also stumpf wird. Bei $x = 3$ aber wird das Veränderungs-Verhältnis wieder Null, die Funktion selbst wird 3, um bei wachsendem x wieder größer zu werden, weil das Veränderungs-Verhältnis positiv wird.

Wir sehen also, daß die Berechnung des Veränderungs-Verhältnisses jeder beliebigen Funktion uns genauen Auf-

schluß darüber geben muß, ob bei wachsendem x die Funktionswerte größer oder kleiner werden. Im ersten Fall ist nämlich das Veränderungs-Verhältnis positiv, im zweiten negativ. Wenn insbesondere das Veränderungs-Verhältnis für einen bestimmten Wert von x Null wird, indem dasselbe für kleinere Werte von x positiv war, und für größere negativ wird, so sagt man von der Funktion, daß sie in diesem bestimmten Werte von x ein Maximum erreicht habe. Der dem bestimmten Werte von x zugehörige Funktionswert muß dann größer sein, als alle benachbarten Funktionswerte, sowohl als die aus kleineren Werten von x sich ergebenden Funktionswerte, wie auch als die Funktionswerte, die aus größeren Werten von x resultieren. Es kann aber auch das Umgekehrte stattfinden: für einen bestimmten Wert von x kann das Veränderungs-Verhältnis Null werden, indem es für kleinere Werte von x negativ war, für größere aber positiv wird. Dann sagt man von der Funktion, daß sie in dem bestimmten Werte von x ein Minimum erreicht habe. Dann muß der Funktionswert für den bestimmten Wert von x kleiner sein, als alle benachbarten Funktionswerte, sowohl kleiner als die aus kleineren Werten von x resultierenden Funktionswerte, wie auch kleiner als die Funktionswerte, die sich aus größeren Werten von x ergeben. Hiernach kann man also die Maxima und Minima einer Funktion dadurch finden, daß man ihr Veränderungs-Verhältnis für x_1 aufsucht, dasselbe gleich Null setzt, und die entstandene Gleichung für x_1 löst. Durch Lösung dieser Gleichung findet man alle Werte von x_1, für welche das Veränderungs-Verhältnis Null ist, für die also die Funktion ein Maximum oder ein Minimum erreicht. In dem obigen Beispiel fanden wir, daß $3x_1^2 - 12x_1 + 9$ allgemein das Veränderungs-Verhältnis der Funktion

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

ausdrückt. Demnach müssen wir die Werte von x, für welche die Funktion ein Maximum oder ein Minimum erreicht, dadurch finden, daß wir $3x_1^2 - 12x_1 + 9$ gleich Null setzen, und die entstandene Gleichung lösen. Wir erhalten aus:

$$3x_1^2 - 12x_1 + 9 = 0$$

die beiden Werte:

$$x_1 = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

In der Tat fanden wir schon oben, daß die Funktion:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

für $x = 1$ das Maximum 7 und für $x = 3$ das Minimum 3 erreicht.

Auch geben die obigen Betrachtungen über das Veränderungs-Verhältnis einer Funktion uns ein Mittel an die Hand, um zu entscheiden, ob für einen auf solche Weise gefundenen Wert x_1 von x die Funktion ein Maximum **oder** ein Minimum erreicht hat. Bei einem Maximum geht nämlich das Veränderungs-Verhältnis vom Positiven (Wachsen der Funktionswerte selbst) durch Null zum Negativen (Abnahme der Funktionswerte selbst), d. h. das Veränderungs-Verhältnis selbst wird kleiner. Wenn man demgemäß das x_1 enthaltende, allgemein ausgedrückte Veränderungs-Verhältnis als eine Funktion von x_1 auffaßt, und für diese Funktion wieder das Veränderungs-Verhältnis aufsucht, so muß dieses bei einem Maximum negativ werden. Umgekehrt muß es positiv werden, wenn für x_1 ein Minimum eingetreten war, weil bei einem Minimum das Veränderungs-Verhältnis vom Negativen durch Null zum Positiven übergeht, und demnach im Größerwerden sich befindet. In der Tat, wenn man von der Funktion, die oben durch Nullsetzung die Maximalstelle und Minimalstelle der ursprünglichen Funktion ergab, das Veränderungs-Verhältnis sucht, so erhält man aus

$$3x^2 - 12x + 9$$

die neue Funktion: $6x - 12$.

Diese Funktion wird aber für $x = 1$ negativ, nämlich $= -6$, für $x = 3$ positiv, nämlich $= +6$. Daher mußte die Funktion

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$$

für $x = 1$ ein Maximum, für $x = 3$ ein Minimum haben. Meist wird diese Berechnung des Veränderungs-Verhältnisses des als Funktion von x aufgefaßten Veränderungs-Verhältnisses nicht nötig sein, weil von vornherein ersichtlich ist, ob man es mit einem Maximum oder mit einem Minimum zu tun hat. Darum unterlassen wir hier auch die Diskussion des Falls, daß das zweite Veränderungs-Verhältnis nicht positiv und nicht negativ, sondern Null ist.*)

*) Cf. Bd. X dieser Sammlung, § 18.

Für die Berechnung derjenigen Werte von x, bei denen eine Funktion ein Maximum oder ein Minimum erreicht, sowie der Maximalwerte und der Minimalwerte selbst, mögen die folgenden drei Beispiele dienen:

1) Aus der vorliegenden Funktion:

$$y = x^2 - 4x + 3$$

folgt:

$$y_2 = x_2^2 - 4x_2 + 3 \text{ und } y_1 = x_1^2 - 4x_1 + 3,$$

also:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 - x_1^2) - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 4,$$

woraus für $x_2 - x_1 = 0$ folgt:

$$2x_1 - 4.$$

Nun setzt man $2x_1 - 4$ gleich Null und findet, daß die entstandene Gleichung für $x_1 = 2$ erfüllt wird. Der zugehörige Funktionswert y_1 ergibt sich aus:

$$y_1 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

Daß dieser Funktionswert ein Minimum ist, ergibt sich entweder durch Substitutionen in die vorliegende Funktion oder graphisch oder auch, indem man zu

$$2x - 4$$

von neuem das Veränderungs-Verhältnis sucht; dieses wird, unabhängig von x, gleich $+2$, also positiv, woraus folgt, daß die Funktion $y = x^2 - 4x + 3$ für $x = 2$ ein Minimum erreicht.

2) Es ist zu untersuchen, für welche Werte von x die ganze Funktion $y = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 500$ ein Maximum oder ein Minimum erreicht.

Aus:

$$y_2 = x_2^4 - 8x_2^3 + 16x_2^2 + 500$$

und:

$$y_1 = x_1^4 - 8x_1^3 + 16x_1^2 + 500$$

folgt:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^4 - x_1^4) - 8(x_2^3 - x_1^3) + 16(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1}$$

$$= (x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_1^3) - 8(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) + 16(x_2 + x_1).$$

Wenn man hier $x_2 = x_1$ setzt, erhält man:

$$4x_1^3 - 24x_1^2 + 32x_1.$$

Diese Funktion von x_1, die für jedes x_1 das Veränderungs-Verhältnis ausdrückt, hat man gleich Null zu setzen. So erhält man:

$$4x_1^3 - 24x_1^2 + 32x_1 = 0 \text{ oder } x_1^3 - 6x_1^2 + 8x_1 = 0$$

oder:

$$x_1(x_1^2 - 6x_1 + 8) = 0,$$

welche Gleichung für drei Werte von x_1 richtig wird, erstens, wenn $x_1 = 0$ wird, zweitens, wenn $x_1 = 2$ wird, drittens, wenn $x_1 = 4$ wird.

Da die Funktion $y = x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 500$ für $x = -1$ den Wert $+525$, für $x = 0$ den Wert 500, für $x = +1$ den Wert 509 erhält, so folgt, daß bei $x = 0$ ein Minimum eintritt. Aus dem Vergleich der fünf Funktionswerte

$$509,\ 516,\ 509,\ 500,\ 525,$$

die sich beziehungsweise für $x = \mp 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$ ergeben, erkennt man ferner ohne weiteres, daß die Funktion bei $x = 2$ ein Maximum von 516, und bei $x = 4$ ein neues Minimum von 500 erreicht.

3) Da die Funktion $\sin x - \frac{1}{2}x$ für $x = 0$ Null wird, für $x = \frac{\pi}{6}$ den Funktionswert $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{12} = 0{,}500 - 0{,}262 = 0{,}238$, für $x = \frac{\pi}{2}$ aber den Funktionswert $1 - \frac{\pi}{4} = 1{,}000 - 0{,}785 = 0{,}215$ erreicht, also erst steigt, und dann wieder sinkt, so ist ersichtlich, daß die Funktion zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ ein Maximum besitzen muß. Bei welchem Werte von x dieses Maximum liegt, entscheidet die oben erörterte Methode, nach welcher man erhält:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(\sin x_2 - \sin x_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}.$$

Nach § 2 oder nach dem Beispiel 5) in § 4 ist nun:

$$\lim_{x_2 - x_1 = 0} \frac{\sin x_2 - \sin x_1}{x_2 - x_1} = \cos x_1,$$

weil $\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$ ist, und

$$\lim_{x_2 = x_1} \frac{2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2}}{x_2 - x_1} = \frac{\sin \frac{x_2 - x_1}{2}}{\frac{x_2 - x_1}{2}} = 1$$

ist. Also ist der allgemeine Wert des Änderungs-Verhältnisses der Funktion $\sin x - \frac{1}{2} x$:

$$\cos x_1 - \frac{1}{2}.$$

Wir haben nun $\cos x_1 - \frac{1}{2}$ gleich Null zu setzen, woraus wir $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $x_1 = \frac{\pi}{3}$ erhalten. Hiernach muß also die Funktion

$$\sin x - \frac{1}{2} x$$

das gesuchte Maximum bei $x = \frac{\pi}{3}$ erhalten. Der Wert des Maximums ergibt sich aus:

$$\sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} = 0{,}324.$$

Namentlich wird die im Obigen geschilderte Aufsuchung der Maxima und Minima einer Funktion in der Planimetrie und Stereometrie angewendet, wie folgende Beispiele zeigen:

4) Aus der Schar aller Rechtecke von einem und demselben Umfange u dasjenige herauszusuchen, das den größten Inhalt hat. Man bezeichne eine Seite eines beliebigen von den unzählig vielen Rechtecken mit x. Dann ist die andere Rechtecks-Seite $\frac{u}{2} - x$. Also ist die Funktion, die ein Maximum werden soll:

$$y = x \left(\frac{u}{2} - x \right) = \frac{u}{2} x - x^2.$$

Demnach haben wir anzusetzen:

$$y_2 - y_1 = \frac{u}{2}(x_2 - x_1) - (x_2^2 - x_1^2),$$

oder:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{u}{2} - (x_2 + x_1).$$

Indem wir nun auf der rechten Seite $x_2 = x_1$ setzen, und den entstandenen Ausdruck gleich Null setzen, erhalten wir:

$$\frac{u}{2} - 2x_1 = 0 \text{ oder } x_1 = \frac{u}{4}.$$

Demnach ist die eine Rechtecksseite der vierte Teil des gegebenen Umfangs. Demnach hat in der Schar aller Rechtecke gleichen Umfangs das Quadrat den größten Inhalt.

5) Einer Kugel denjenigen geraden Kegel einzubeschreiben, dessen Volumen am größten ist. Der Radius der Kugel sei r, die Höhe des veränderlichen geraden Kegels sei x, der Radius seines Grundkreises ρ. Dann ergibt sich aus dem Sehnensatze der Planimetrie:

$$\rho^2 = x(2r - x).$$

Für das Volumen V des veränderlichen Kegels ergibt sich aus der Stereometrie:

$$V = \frac{\pi x}{3} \cdot \rho^2 = \frac{\pi}{3} x^2 (2r - x).$$

Da $\frac{\pi}{3}$ eine Konstante ist, also bei der Aufsuchung des Maximums keine Rolle spielen kann, so haben wir nur zu untersuchen, für welchen Wert von x die Funktion

$$y = x^2(2r - x) = 2rx^2 - x^3$$

ein Maximum erreicht. Demgemäß setzen wir an:

$$y_2 - y_1 = 2r(x_2^2 - x_1^2) - (x_2^3 - x_1^3)$$

und:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2r(x_2 + x_1) - (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2).$$

Wir setzen nun in der rechten Seite dieser Gleichung $x_2 = x_1$

und den erhaltenen r und x_1 enthaltenden Ausdruck gleich Null. Dadurch bekommen wir:

$$4 r x_1 - 3 x_1^2 = 0,$$

woraus, da die Lösung $x_1 = 0$ das gewünschte Maximum nicht liefert, folgt:

$$x_1 = \frac{4}{3} r.$$

Man hat also nur denjenigen Durchmesser in drei gleiche Teile zu teilen, dessen einer Endpunkt die Spitze des Kegels ist, und darauf, senkrecht zu diesem Durchmesser, durch denjenigen Dreiteilungspunkt eine Ebene zu legen, der dieser Kegelspitze am fernsten liegt. Dann schneidet die Ebene die Kugel in einem Kreise, der der Grundkreis des gesuchten Maximalkegels ist.

6) Im Endpunkt A des Durchmessers AB eines Kreises ist eine Tangente gezogen. Es soll die kürzeste unter den Strecken CD konstruiert werden, wo C den Schnittpunkt der Verlängerung von AB über B hinaus mit einer beliebigen Tangente und D den Schnittpunkt dieser Tangente mit der in A berührenden Tangente bedeutet.

Wir bezeichnen den Radius des Kreises mit r, die Strecke AD mit x, CD mit y, CA mit z. Ferner heiße E der auf CD liegende Berührungspunkt und M das Zentrum des Kreises. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CEM und CAD, sowie aus der Gleichheit von DA und DE folgt:

$$x : z = r : (y - x)$$

oder:

$$z = \frac{x(y - x)}{r}.$$

Deshalb folgt aus dem Pythagoräischen Lehrsatze die Gleichung:

$$y^2 - x^2 = \frac{x^2 (y - x)^2}{r^2}.$$

Hieraus erhält man dadurch, daß man durch $y - x$ hebt:

$$y + x = \frac{x^2 (y - x)}{r^2},$$

woraus man die Funktion, welche y durch x ausdrückt, in folgender Form erhält:

$$y = \frac{x^3 + xr^2}{x^2 - r^2}.$$

Demgemäß setzen wir an:

$$y_2 - y_1 = \frac{x_2^3}{x_2^2 - r^2} - \frac{x_1^3}{x_1^2 - r^2} + \frac{x_2 r^2}{x_2^2 - r^2} - \frac{x_1 r^2}{x_1^2 - r^2}.$$

oder:

$$y_2 - y_1 = \frac{x_2^2 x_1^2 (x_2 - x_1) - r^2 (x_2^3 - x_1^3) + r^2 x_2 x_1 (x_1 - x_2) - r^4 (x_2 - x_1)}{(x_2^2 - r^2)(x_1^2 - r^2)}$$

also:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 x_1^2 - r^2 (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) - r^2 x_2 x_1 - r^4}{(x_2^2 - r^2)(x_1^2 - r^2)}.$$

Wenn wir nun $x_2 - x_1$ sich der Null nähern lassen, gelangen wir zu dem Grenzwert:

$$\lim_{x_2 - x_1 = 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1^4 - 3r^2 x_1^2 - r^2 x_1^2 - r^4}{(x_1^2 - r^2)^2}.$$

Das gesuchte Minimum wird also, da $x_1 = \infty$ ein Maximum liefert, erreicht, sobald

$$x_1^4 - 3r^2 x_1^2 - r^2 x_1^2 - r^4$$

Null wird. Wir haben also die Gleichung:

$$x_1^4 - 4r^2 x_1^2 - r^4 = 0$$

zu lösen. Sie wird erfüllt, wenn:

$$\frac{x_1^2}{r^2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

ist. Da $2 - \sqrt{5}$ eine negative Zahl ist, und eine solche nicht gleich dem Quadrate von $\frac{x_1}{r}$ sein kann, so erhalten wir nur die eine Wurzel:

$$x_1^2 = r^2 (2 + \sqrt{5})$$

oder:

$$x_1 = r \sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

Setzen wir den gefundenen Wert von x_1 in die obige Gleichung für y ein, so erhalten wir:

$$y_1 = x_1 \frac{x_1^2 + r^2}{x_1^2 - r^2} = r\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

$$= r\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = r\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{4}(2+2\sqrt{5})$$

$$= r\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{22+10\sqrt{5}}.$$

Daher ist:

$$z_1^2 = y_1^2 - x_1^2 = \frac{r^2}{4}(22+10\sqrt{5}) - \frac{r^2}{4}(8+4\sqrt{5})$$

$$= \frac{r^2}{4}(14+6\sqrt{5}) = \frac{r^2}{4}(3+\sqrt{5})^2$$

oder:

$$z_1 = \frac{r}{2}(3+\sqrt{5}).$$

Aus diesem Werte von z_1 kann man eine einfache Konstruktion der gesuchten geraden Linie entnehmen. Fällt man nämlich von E das Lot EF auf AB, so ist nach den Sätzen vom rechtwinkligen Dreieck:

$$MC : ME = ME : MF$$

oder:

$$(z - r) : r = r : MF,$$

woraus für FM folgt:

$$MF = \frac{r^2}{z-r} = \frac{r^2}{\frac{r}{2}(3+\sqrt{5}) - r} = \frac{r}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2r(\sqrt{5}-1)}{5-1}$$

$$= \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1),$$

wodurch erkannt ist, daß MF der größere Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Radius ist. Um die

gesuchte gerade Linie zu konstruieren, hat man daher nur MB nach dem goldenen Schnitt so zu teilen, daß der größere Abschnitt nach M hin liegt, im Teilungspunkte F auf MB das Lot zu errichten, das den Kreis in E trifft. Die in E als Berührungspunkt gelegte Tangente schneidet die Tangente in A und die Verlängerung des Durchmessers über B hinaus in C so, daß die Strecke CD kürzer ist, als jede Strecke, die in derselben Weise aus einem anderen Berührungspunkt, als E ist, hervorgeht.

7) Unter allen Cylindern, die eine und dieselbe Gesamt-Oberfläche O haben, denjenigen zu bestimmen, der das größte Volumen hat. Wieviel mal so groß ist bei diesem Maximal-Cylinder die Höhe als der Grundradius?

Wenn x der Radius des Grundkreises des Cylinders ist, O die Gesamt-Oberfläche, h die Höhe, V das Volumen, so gelten die Gleichungen:

$$O = 2x^2\pi + 2x\pi h$$

und:

$$V = \frac{x^2\pi \cdot h}{3}.$$

Da O konstant sein soll und x die unabhängige Variable, V die abhängige werden muß, so ist der sich aus der ersten Gleichung ergebende Wert von h in die zweite Gleichung einzusetzen. So kommt:

$$h = \frac{O - 2x^2\pi}{2x\pi} = \frac{O}{2x\pi} - x$$

und:

$$V = \frac{\pi}{3}x^2\left(\frac{O}{2x\pi} - x\right) = \frac{Ox}{6} - \frac{\pi}{3}x^3.$$

Daher haben wir anzusetzen:

$$V_2 - V_1 = \frac{O}{6}(x_2 - x_1) - \frac{\pi}{3}(x_2^3 - x_1^3),$$

und erhalten:

$$\frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} = \frac{O}{6} - \frac{\pi}{3}(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2),$$

woraus wir durch Übergang zur Grenze, zur Bestimmung von x_1 die Gleichung erhalten:

$$\frac{O}{6} - \frac{\pi}{3} \cdot 3 x_1^2 = 0$$

oder:

$$\frac{O}{6\pi} = x_1^2 \text{ oder } O = 6\pi x_1^2,$$

woraus durch die obige Gleichung für h folgt:

$$h_1 = \frac{O}{2 x_1 \pi} - x_1 = 3 x_1 - x_1 = 2 x_1,$$

woraus sich das Resultat ergibt, daß bei dem gesuchten Maximalcylinder die Höhe zweimal so groß ist als der Radius.

Übungen zu § 5.

Berechne das Veränderungs-Verhältnis der folgenden Funktionen zwischen $x = 1$ und $x = 3$.

1) $4x^2 - 5x + 8$; 2) $x^3 - 4x$; 3) $\frac{1}{x}$; 4) $\frac{4x-3}{3x-2}$; 5) $x^3 - 8x^2 - 5x + 4$; 6) $\log_{10} x$; 7) 2^x.

Berechne zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$ das Veränderungs-Verhältnis der folgenden Funktionen:

8) $\sin x$; 9) $\cos x$; 10) $\operatorname{tg} x - \sin x$; 11) $\cos 2x$.

Berechne das Veränderungs-Verhältnis für $x = 1$ bei den folgenden Funktionen:

12) x^4; 13) $x^3 - x$; 14) $x^5 - 2x^3 + 4x$; 15) $\frac{3}{x}$; 16) $\sqrt{x}$.

Drücke das Veränderungs-Verhältnis allgemein durch x_1 aus, bei den folgenden Funktionen:

17) $x^3 - 5x^2 + 7x - 9$; 18) $\sqrt[3]{x}$; 19) $\sin \frac{x}{2}$; 20) $\frac{1}{x^4}$.

Entscheide, ob die folgenden Funktionen für $x_1 = 2$ im Zunehmen oder im Abnehmen begriffen sind:

21) $x^4 - 3x^3$; 22) $\frac{1}{x^3}$; 23) $\sqrt{x-1}$; 24) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x - 2\right)$.

Berechne diejenigen Werte von x, bei welchen die folgenden Funktionen ein Maximum oder ein Minimum erreichen, und berechne die Größe der Maxima oder Minima:

25) $x^3 - 1\ 2x^2 + 4\ 5x - 6$; 26) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + \frac{5}{12}$;

27) $\sin x + \cos x$; 28) $x - \sqrt{x}$; 29) $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$.

---

30) Welches ist das größte unter den Rechtecken, welche einem Quadrate so einbeschrieben werden können, daß seine Seiten den Diagonalen des Quadrats parallel sind?

31) Von welchem Punkte der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks hat man Lote auf die Katheten zu fällen, damit diese Lote mit den Kathetenrichtungen zusammen ein Rechteck von möglichst großem Inhalt bilden?

32) Welches ist das größte unter allen Dreiecken, die ihre Spitzen im Zentrum eines Kreises haben, und deren Gegenseiten parallele Sehnen sind?

33) Welcher unter allen einer Kugel einbeschreibbaren geraden Kegeln hat den größten Mantel?

34) Welcher von den geraden Kegeln, die einer Kugel umschrieben werden können, hat den kleinsten Mantel?

35) Aus der Schar der einem Kreise einbeschreibbaren gleichschenkligen Dreiecke dasjenige herauszufinden, das den größten Umfang hat.

---

36) Über eine horizontale Strecke als Basis ein in einer vertikalen Ebene aufsteigendes gleichschenkliges Dreieck so zu errichten, daß eine Kugel, die von der Spitze aus längst eines Schenkels herabrollt, möglichst schnell die Basis erreiche.

37) Wie ist bei einer Konservenbüchse das Verhältnis der Höhe zum Durchmesser einzurichten, damit bei vorgeschriebenem Volumen möglichst wenig Blech zu ihrer Herstellung gehöre?

38) Aus einem quadratischen Stück Pappe, dessen Seite a Zentimeter mißt, hat man ein offenes Kästchen von

möglichst großem Volumen dadurch hergestellt, daß man an den vier Ecken vier gleich große Quadrate abschnitt, und um die vier Seiten des innen entstandenen Quadrats die außerdem entstandenen vier Rechtecke rechtwinklig umbog. Welchen Inhalt hat das Kästchen?

39) Nach den Fallgesetzen ergibt sich für einen schräg in die Höhe geworfenen Körper die horizontale Entfernung x Meter nach t Sekunden und die vertikale Erhebung y Meter nach t Sekunden aus den Formeln $x = c \cdot t \cdot \cos\alpha$ und $y = c \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$, wenn α der Elevationswinkel und g die Beschleunigung beim freien Fall (9,8 Meter pro Sekunde) bedeuten. a) Unter welchem Winkel muß deshalb ein Körper aufwärts geworfen werden, damit er sich vom Ausgangspunkt in horizontaler Richtung möglichst weit entfernt? b) Welches ist die höchste Erhebung des Körpers?

40) Jemand geht auf dem Bürgersteig einer Straße, und will möglichst schnell nach einem jenseits des 10 Meter breiten Fahrdamms in direkter Richtung 26 Meter entfernten Punkte gelangen. Wieviel Meter hat er noch auf dem Bürgersteig zu gehen, ehe er den Fahrdamm in schräger Richtung überschreitet, wenn angenommen wird, daß er in einer Sekunde auf dem Bürgersteig $1\frac{1}{4}$ Meter, auf dem Fahrdamm aber, des Schmutzes wegen, nur 1 Meter zurücklegt?

41) Die zweite Potenz eines echten Bruches ist größer als seine vierte Potenz. Um wieviel aber höchstens?

---

§ 6. Die endliche geometrische Reihe.

$$\text{I)}\quad z = a \cdot q^{n-1};$$

$$\text{II)}\quad s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Eine endliche geometrische Reihe oder Progression mit dem konstanten Quotienten q ist eine geordnete Folge von Zahlen, in der jede Zahl, dividiert durch die vorhergehende, den Quotienten q ergibt. Z. B.:

2, 6, 18, 54, 162, ...

Je nachdem q positiv oder negativ ist, haben die Glieder der Reihe übereinstimmende oder abwechselnde Vorzeichen. Abwechselnde Vorzeichen, nämlich für $q = -2$, hat z. B. die Reihe:

$$+5, \quad -10, \quad +20, \quad -40, \quad +80, \ldots$$

Wenn der konstante Quotient einer geometrischen Reihe 1 ist, werden alle Glieder einander gleich. Wenn der konstante Quotient größer als 1 ist, wird jedes folgende Glied größer als das vorhergehende, z. B.:

$$8, \quad 12, \quad 18, \quad 27, \quad 40\tfrac{1}{2}, \ldots$$

Eine solche Reihe nennt man **steigend**. Wenn der konstante Quotient kleiner als 1 ist, wird jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende, und man nennt die Reihe dann **fallend**, z. B.:

$$9, \quad 6, \quad 4, \quad 2\tfrac{2}{3}, \quad 1\tfrac{7}{9}, \ldots$$

Wenn a das **Anfangsglied** einer geometrischen Reihe und q ihren konstanten Quotienten bezeichnet, so ist das zweite Glied nach der Definition $a \cdot q$, das dritte Glied geht aus dem zweiten wiederum durch Multiplikation mit q hervor, muß also gleich $a \cdot q^2$ sein, das vierte Glied wird $a \cdot q^3$, u. s. w., so daß das n-te Glied, das wir z nennen wollen, aq^{n-1} wird. Wir erhalten also:

$$z = a \cdot q^{n-1} \text{ (Formel I der Überschrift)}$$

als Formel für das n-te Glied einer geometrischen Reihe, deren Anfangsglied a heißt, und deren konstanter Quotient q heißt.

Was die Summe s der ersten n Glieder einer solchen Reihe anbetrifft, so läßt sich dieselbe durch a, q, n sehr einfach ausdrücken, wie sich auf folgendem Wege ergibt. Man multipliziere die Gleichung:

$$s = a + a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^{n-1}$$

mit q. Dadurch erhält man:

$$s \cdot q = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^3 + \ldots + a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n.$$

Subtrahiert man nun die ersten dieser beiden Gleichungen von der zweiten, so erhält man, da rechts alle Glieder außer aq^n und a sich heben:

$$s \cdot q - s = a \cdot q^n - a$$

oder durch Absondern:

$$s \cdot (q - 1) = a \cdot (q^n - 1),$$

woraus sich für s die in der Überschrift zu zweit genannte Summenformel ergibt, nämlich:

$$s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Multipliziert man bei dem rechts stehenden Bruche Zähler und Nenner mit minus eins, so erhält man eine zweite Form der Summenformel, nämlich:

$$s = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Die erste oder die zweite Form wird man anwenden, je nachdem $q > 1$ oder < 1 ist. Beispielsweise ergibt sich als Summe der ersten sechs Glieder der mit

$$5,\ 15,\ 45$$

beginnenden Reihe, da hier $a = 5$, $q = 3$, $n = 6$ ist:

$$s = 5 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 5 \cdot \frac{728}{2} = 1820.$$

Ferner erhält man als Summe der ersten vier Glieder der Reihe:

$$2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27} \cdots$$

$$s = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{81}}{\frac{2}{3}} = 3 \cdot \frac{80}{81} = \frac{80}{27} = 2\frac{26}{27}.$$

Jede der beiden in der Überschrift genannten Formeln enthält vier von den fünf Größen:

$$a,\ q,\ n,\ z,\ s.$$

Man kann daher immer drei von ihnen als gegeben betrachten. Dann ist die vierte und fünfte durch die beiden Gleichungen der Überschrift bestimmt. Auf solche Weise entstehen zehn mal zwei oder zwanzig Aufgaben, wie man auch erhält, wenn man bedenkt, daß erstens fünf Formeln

möglich sind, von denen jede vier von den fünf Buchstaben enthält, indem immer jede dieser fünf Formeln einen der fünf Buchstaben nicht enthält, und daß zweitens in jeder dieser fünf Formeln jede der vier in ihr enthaltenen Größen als Unbekannte betrachtet werden kann. Zwei von diesen fünf Formeln sind in der Überschrift angegeben, nämlich die, wo s fehlt, und die, wo z fehlt. Eine dritte Formel, nämlich die, wo n fehlt, erhält man, wenn man die erste Formel mit q multipliziert, dadurch

$$a q^n = z q$$

erhält und diesen Ausdruck für $a q^n$ in die zweite Formel einsetzt. Dadurch erhält man:

$$s = \frac{z q - a}{q - 1},$$

woraus sich für q die n nicht enthaltende dritte Formel ergibt, nämlich:

III) $$q = \frac{s - a}{s - z}.$$

Die a nicht enthaltende Formel IV) erhält man, wenn man II) durch I) dividiert, und dann mit z multipliziert, nämlich:

IV) $$s = z \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1) q^{n-1}} = z \cdot \frac{q^n - 1}{q^n - q^{n-1}}.$$

Endlich erhält man die q nicht enthaltende Formel V), wenn man den in III) für q gewonnenen Ausdruck in I) einsetzt. So kommt:

V) $$z = a \cdot \frac{(s-a)^{n-1}}{(s-z)^{n-1}}.$$

Zu jeder dieser fünf Formeln gehören vier Probleme, je nachdem nämlich der eine oder der andere von den vier in ihr enthaltenen Größen unbekannt ist. Wenn n gesucht wird, kann das betreffende Problem immer durch Logarithmierung gelöst werden. Es ergibt sich nämlich aus I):

$$\log z = \log a + (n-1) \log q$$

und daraus: $$n = \frac{\log z - \log a}{\log q} + 1.$$

Ferner ergibt sich aus II) zunächst:

$$\frac{s(q-1)}{a}+1=q^n,$$

woraus durch Logarithmieren folgt:

$$n=\frac{\log(sq-s+a)-\log a}{\log q}.$$

Aus IV) folgt zunächst:

$$\frac{s}{z}(q-1)=q-\frac{1}{q^{n-1}},$$

oder:

$$\frac{1}{q^{n-1}}=\frac{qz-sq+s}{z},$$

woraus man durch Logarithmieren erhält:

$$n-1=\frac{\log z-\log(qz-sq+s)}{\log q}.$$

In ähnlicher Weise erhält man aus V):

$$n=1+\frac{\log z-\log a}{\log(s-a)-\log(s-z)}.$$

Wenn aber nicht n, sondern q gesucht wird, so ist dies mit elementaren Mitteln nur dann möglich, wenn a, z, n oder a, z, s gegeben sind. Dann erhält man aus I) und III):

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$$

und

$$q=\frac{s-a}{s-z}.$$

Wenn dagegen a, s, n oder z, s, n gegeben sind, so ist, wie man aus II) und IV) erkennt, im allgemeinen die Lösung einer Gleichung n-ten Grades erforderlich, um q zu bestimmen.

Wenn m irgend ein Glied einer geometrischen Reihe ist, so ist, wenn ihr konstanter Quotient q ist, das vorangehende Glied gleich $\frac{m}{q}$, das nächstfolgende gleich $m \cdot q$, das

Produkt beider also gleich m^2, woraus hervorgeht, daß jedes Glied einer geometrischen Reihe gleich dem geometrischen Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist. Wenn daher zwischen zwei Zahlen eine dritte so interpoliert werden soll, daß die drei Zahlen eine geometrische Reihe bilden, so ist das geometrische Mittel der beiden gegebenen Zahlen die dazwischenzuschiebende Zahl. Wenn aber $v-1$ Zahlen zwischen zwei Zahlen b und c so zu interpolieren sind, daß b Anfangsglied, c das $(v+2)$-te Glied einer geometrischen Reihe ist, so hat man, um die v zu interpolierenden Zahlen zu bestimmen, zu setzen:

$$c = b \cdot q^{v+1},$$

woraus folgt:

$$q = \sqrt[v+1]{c:b} = \sqrt[v+1]{c} : \sqrt[v+1]{b} = \sqrt[v+1]{c \cdot b^{-1}}.$$

Daher ist die erste zu interpolierende Zahl:

$$b \cdot \sqrt[v+1]{c \cdot b^{-1}},$$

oder gleich:

$$\sqrt[v+1]{c \cdot b^{v}}.$$

Für die zweite Zahl erhält man:

$$\sqrt[v+1]{c^2 \cdot b^{v-1}},$$

also für die i-te zu interpolierende Zahl:

$$\sqrt[v+1]{c^i b^{v-i+1}}.$$

Die numerische Ausrechnung wird hierbei am besten logarithmisch zu bewerkstelligen sein.

Übungen zu § 6.

Wie heißt der konstante Quotient bei den folgenden geometrischen Reihen:

1) 4, 20, 100, 500, ...? 2) 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, ...? 3) 1, $3\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{4}$, ...? 4) $\frac{1}{3}$, -1, $+3$, -9, ...? 5) $\frac{8}{125}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{2}{5}$, ...? 6) $\sqrt{3}$, 3, $3\sqrt{3}$, 9, ...? 7) 1, $\sqrt{2}-1$, $3-2\sqrt{2}$, ...? 8) $\sqrt{2}$, 1, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, ...? 9) $-\sqrt{5}$, 5, $-5\sqrt{5}$, ...?

Setze die Reihe fort, deren erste beide Glieder sind:

10) 4, 5; 11) 11, 9; 12) -1, $+1$; 13) $\sqrt{3}-1$, 1; 14) a, a:b.

15) Wie heißt das dreizehnte Glied der Reihe, deren Anfangsgebiet $\frac{1}{8}$ ist, und deren konstanter Quotient 2 ist?

Berechne logarithmisch das 21. Glied für:

16) $a=\frac{2}{3}, q=\frac{3}{2}$; 17) $a=8\frac{1}{2}, q=\frac{4}{5}$; 18) $a=\frac{40}{103}, q=1{,}03$; 19) $a=3, q=-1$.

20) Wie heißt der konstante Quotient der Reihe, deren erstes Glied 8 ist, und deren viertes Glied 27 ist?

21) Wie heißt der konstante Quotient der Reihe, deren siebentes Glied 7 und deren achtes Glied 8 ist?

22) Das wievielte Glied einer mit 3 beginnenden Reihe, deren fünftes Glied 243 ist, beträgt 177147?

23) Das 2n-te Glied einer Reihe ist $+1$, das $(2n+1)$-te Glied -1, wobei n eine ganze Zahl ist. Wie heißt das erste Glied?

---

24) Wie kann man die Formel II) der Überschrift aus der Divisionsformel für $(q^n-1):(q-1)$ ableiten?

Berechne die Summe der ersten zehn Glieder für:

25) $a=1, q=2$; 26) $a=5, q=3$; 27) $a=\frac{27}{4}$, $q=\frac{2}{3}$.

28) Von den fünf Größen a, q, n, z, s, die bei einer geometrischen Reihe in Betracht kommen, sind gegeben: a) a, q, n; b) a, q, z; c) a, q, s; d) q, n, z; e) q, n, s; f) q, z, s. Drücke jede der beiden andern Größen aus.

29) Wieviel Glieder hat eine Reihe, deren beide letzte Glieder 7290 und 21870 sind, und deren Summe 32800 beträgt?

30) Wie groß ist die Summe der ersten zwölf Glieder einer geometrischen Reihe, deren zwölftes Glied 2048 beträgt, wenn der konstante Quotient 2 ist?

31) Wieviel Glieder hat eine Reihe, deren erstes Glied 125, deren letztes Glied 4000 ist, und deren Summe 7875 beträgt?

Summiere nach der Formel II) der Überschrift:

32) $1 + a + a^2 + \ldots + a^{15}$; 33) $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^{15}$;

34) $a^{16} + a^{15}b + a^{14}b^2 + \ldots b^{16}$; 35) $c + c\sqrt[4]{c} + \ldots + c^6$.

36) Schalte durch logarithmische Berechnung zwischen 1 und 2 neun Glieder so ein, daß 1 das erste, 2 das elfte Glied einer geometrischen Reihe wird.

37) Bei der gleichschwebenden Temperatur liegen zwischen jedem Tone und seiner Oktave, d. h. demjenigen Tone, der auf doppelt soviel Schwingungen beruht, elf Interpolationstöne derartig, daß die Schwingungszahlen der 13 Töne eine geometrische Reihe bilden. Welches ist der konstante Quotient dieser Reihe?

38) Wie heißt das erste und das siebente Glied derjenigen Reihe, bei welcher die Summe des ersten und siebenten Gliedes $99\frac{1}{8}$, die Summe des zweiten und vierten Gliedes 39 beträgt?

39) In jeder geometrischen Reihe muß das Produkt zweier Glieder, die von der Mitte gleichweit abstehen, konstant sein. Warum?

40) Wie heißt die geometrische Reihe, bei welcher das Produkt aus dem ersten und achten Gliede $1'\,250000$, aber die Summe des vierten und fünften Gliedes 3000 beträgt? (Vgl. 39).

41) Jemand sät 20 hl Weizen, um mehrere Jahre hindurch die ganze Ernte als Aussaat zu verwenden. Er erzielt auf diese Weise nach Ablauf von 6 Jahren eine Ernte von 81 920 hl. Wie viel mal so viel betrug durchschnittlich die Ernte, als die Aussaat?

42) Nach arabischen Berichten soll der Erfinder des Schachspiels Sessa Ebn Daher sich bei einem Könige von Indien als Belohnung die Zahl aller Weizenkörner erbeten haben, die auf dem letzten Felde eines Schachbretts von 64 Feldern zu liegen käme, wenn man auf das erste Feld 1 Korn, auf das zweite 2 Körner, auf das dritte 4 Körner, auf das vierte 8 Körner u. s. w. legen würde. Wie kann man aus $2^{10} = 1024$ sofort erkennen, daß die Zahl der Weizenkörner mehr als 8 Trillionen betragen müßte, und daß die Gesamtzahl der Körner auf allen 64 Feldern mehr als 16 Trillionen ausmachen müßte?

43) Von der Schnelligkeit, mit welcher sich eine interessante Nachricht in einer großen Stadt verbreitet, gibt die Lösung der folgenden Aufgabe eine Anschauung: In einer Stadt von einer Million Einwohner geschehe morgens um 8 Uhr im geheimen ein Attentat, das nur von einer Person gesehen ist. Man nehme nun an, daß die Nachricht darüber sich nur so verbreite, daß jeder in jeder halben Stunde nur zwei Personen trifft, denen er die ihnen noch neue Nachricht mitteilen kann, so daß sie um 9 Uhr von $1+2+4$ Personen, um 10 Uhr von $1+2+4+8+16$ Personen gewußt wird. Um welche Zeit nachmittags wird sie dann von jedem Bewohner der Stadt gewußt?

44) Die Barometerstände nehmen in geometrischer Progression ab, wenn die Höhen der Beobachtungsörter über dem Meeresspiegel in arithmetischer Progression zunehmen. Wie hoch steht hiernach das Barometer in der Höhe von p Metern, wenn es in der Höhe von h Metern b Millimeter, in der Höhe von h′ Metern b′ Millimeter zeigt?

---

§ 7. Die unendliche geometrische Reihe.

$$s = \frac{a}{1-q}, \text{ wo } q < 1.$$

Wenn bei einer geometrischen Reihe das Anfangsglied a positiv ist und der konstante Quotient q positiv und kleiner als eins ist, so wird jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende, und das n-te Glied nähert sich bei wachsendem n der Grenze Null. Denn q^{n-1} hat dann nach dem in Nr. 4) von § 4 ausgesprochenen Satze den Grenzwert Null, und deshalb auch das n-te Glied z, das ja nach § 6 gleich $a\,q^{n-1}$ ist.

Auch für die Summe s einer solchen geometrischen Reihe, bei welcher die Anzahl n unendlich groß ist, erhält man einen bestimmten endlichen Grenzwert. Wenn man nämlich die rechte Seite der Formel II des § 6 in

$$a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

umformt, und beachtet, daß nach Voraussetzung $q < 1$ ist, so erhält man, weil man dem Satze in Nr. 4) von § 4:

$$\lim_{n=\infty} q^n = 0 \text{ (für } q < 1) \text{ ist,}$$

$$s = a \cdot \frac{1-0}{1-q}$$

oder:

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Beispielsweise erhält man für:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

den Grenzwert 2, weil $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$ ist. Auch empirisch erkennt man dies, wenn man nacheinander die Summen der ersten zwei, der ersten drei, der ersten vier u. s. w. Glieder bildet. Dann erhält man beziehungsweise:

$$1\tfrac{1}{2},\ 1\tfrac{3}{4},\ 1\tfrac{7}{8}, \ldots$$

Man nähert sich also der Zahl 2 von unten.

Auch erkennt man leicht, wie nahe man dem Grenzwert $\frac{a}{1-q}$ gekommen ist, wenn man n Glieder der Reihe addiert hat. Denn, wenn d die Zahl ist, um welche diese Summe kleiner als der Grenzwert ist, so kommt:

$$d = \frac{a}{1-q} - a\frac{1-q^n}{1-q} = a \cdot \frac{q^n}{1-q}.$$

Hat man also in dem obigen Beispiele 10 Glieder addiert, so wird:

$$d = a\frac{q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

die Zahl, um welche die Summe noch kleiner ist als die Zahl 2. Man kann auch umgekehrt fragen, wie viel Glieder der unendlichen geometrischen Reihe:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3, \ldots$$

man mindestens addieren muß, damit der Unterschied der erhaltenen Summe von dem Grenzwert

$$\frac{a}{1-q}$$

noch kleiner als die beliebig gegebene Zahl d werde. Da

$$d = a\frac{q^n}{1-q}$$

ist, so erhält man znächst:

$$\frac{d(1-q)}{a} = q^n,$$

daraus:

$$\log d + \log(1-q) - \log a = n \cdot \log q,$$

also:

$$n = \frac{\log d + \log(1-q) - \log a}{\log q}.$$

Aus dem Ausdruck, den wir rechts erhalten haben, erkennen wir, daß die zu

$$\frac{\log d + \log(1-q) - \log a}{\log q}$$

nächst größere ganze Zahl angibt, wie viel Glieder der unendlichen geometrischen Reihe wir zu addieren haben, um zu erreichen, daß die erhaltene Summe um weniger als d kleiner ist, als der Grenzwert $\frac{a}{1-q}$. Ist wiederum $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$ und $d = \frac{1}{1000000}$, so ergibt sich, daß man mindestens 21 Glieder der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$$

addieren muß, um zu erreichen, daß die Summe um weniger als ein Milliontel kleiner wird als die Zahl Zwei.

Auch wenn q nicht, wie soeben zwischen 0 und $+1$, sondern zwischen 0 und -1 liegt, also die Glieder der unendlichen geometrischen Reihe abwechselnde Vorzeichen

haben, strebt bei unbegrenzt wachsender Gliederzahl die Summe der Glieder einem ganz bestimmten Grenzwerte zu. Um dies zu erkennen, haben wir den in § 6 gefundenen Ausdruck für die Summe s:

$$s = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

für den Fall zu prüfen, daß q negativ ist, der absolute Wert von q kleiner als 1 ist, und n unbegrenzt zunimmt. Da die n-te Potenz einer negativen Zahl positiv oder negativ wird, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und da x^n, falls $x < 1$ ist, bei unbegrenzt wachsendem n den Grenzwert Null hat, so erhält man:

$$s = a \cdot \frac{1 \pm 0}{1 - q},$$

also gleichviel, ob n positiv oder negativ ist, denselben Grenzwert:

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

wie bei positiv gedachtem q, nur, daß jetzt der zu a gedachte Nenner, wegen des negativen q, größer als 1 ist, während er im oben behandelten Falle kleiner als 1 war.

Auch die Berechnung der Annäherung an den Grenzwert läßt sich bei abwechselnden Vorzeichen ebenso gestalten, wie oben bei lauter positiven Vorzeichen, nur daß, a zunächst immer als positiv vorausgesetzt, die Summe der n Glieder der Reihe größer als der Grenzwert wird, wenn n ungerade ist, also das letzte der zur Addition verwendeten Glieder positiv ist, dagegen kleiner als der Grenzwert ist, wenn n gerade, also das letzte zur Addition verwendete Glied negativ ist. Sei z. B. $a = 2$, $q = -\frac{3}{4}$, also die folgende Reihe:

$$2, -\frac{3}{2}, +\frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, +\frac{81}{128}, \ldots$$

zu behandeln. Je nachdem wir 1, 2, 3, 4, ... Glieder zur Addition zusammenfassen, erhalten wir beziehungsweise:

$$2, \frac{1}{2}, \frac{13}{8}, \frac{25}{32}, \frac{181}{128}, \ldots$$

Für den Grenzwert erhalten wir:

$$s = \frac{2}{1+\frac{3}{4}} = \frac{8}{7} = 1{,}1428571\ldots,$$

während die soeben gefundenen Summen abwechselnd größer und kleiner als dieser Grenzwert sind. Sie sind nämlich, auf sieben Dezimalstellen berechnet, gleich:

2,0000000
0,5000000
1,6250000
0,7812500
1,4140625

Schon bei zwei Dezimalstellen erkennt man, daß der Unterschied gegen den Grenzwert immer kleiner wird, nämlich 0,86; 0,64; 0,48; 0,36; 0,27, nur daß die berechnete Summe bei ungerader Gliederzahl zu groß, bei gerader Gliederzahl zu klein wird.

Die unendliche geometrische Reihe kann auch als Funktion einer veränderlichen Größe x aufgefaßt werden, falls diese die Grenzen

$$-1 < x < +1$$

inne hält. Setzt man nämlich den Vermehrungsfaktor $q = x$ und den in allen Gliedern der Reihe konstanten Faktor a gleich 1, so ergibt sich

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

und, wie oben erkannt ist, nähert sich y um so mehr dem Werte:

$$\frac{1}{1-x},$$

je mehr Glieder der Reihe zur Addition verwendet werden. Nun haben wir aber in § 2 gelernt, das Gleichheitszeichen bei veränderlichen Größen auch dann anzuwenden, wenn die eine sich der andern so nähert, daß der Unterschied beliebig klein gemacht werden kann. Wir setzen demgemäß geradezu:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \text{ ad inf. für } 0 < x < 1,$$

und meinen damit, daß der Unterschied zwischen der linken und der rechten Seite dieser Gleichung immer kleiner wird, je mehr Glieder man auf der rechten Seite zur Addition verwendet. Ebenso erhält man nach dem Obigen:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots \text{ ad inf. für } 0 < x < 1.$$

Das Zeichen „ad inf.“ bedeutet in solchen Gleichungen „bis ins Unendliche“, wodurch angedeutet wird, daß eine wirkliche Gleichheit nie erzielt werden kann, sondern daß man dem Grenzwert $\frac{1}{1-x}$ bezw. $\frac{1}{1+x}$ um so näher kommt, je mehr Glieder man zur Addition verwendet.

Übungen zu § 7.

Berechne:

1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$ ad inf.; 2) $11 + \frac{11}{4} + \frac{11}{16} + \frac{11}{64} + \ldots$ ad inf.;

3) $4 + 3 + \frac{9}{4} + \ldots$ ad inf.; 4) $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \ldots$ ad inf.

Berechne:

5) $\lim_{n=\infty} 1 + \frac{2}{3} + \ldots \left(\frac{2}{3}\right)^n$; 6) $\lim_{n=\infty} 7 + 1 + \frac{1}{7} + \ldots \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

7) Berechne die Glieder der folgenden Reihe so weit, daß die Summe nur um $\frac{1}{100}$ oder noch weniger kleiner als $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$ bleibt:

a) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$ ad inf.; b) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$ ad inf.

8) Wieviel Glieder der folgenden Reihe muß man mindestens berücksichtigen, um zu erreichen, daß ihre Summe um weniger als $\frac{1}{50}$ kleiner ist, als ihr Grenzwert:

$$4 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \ldots \text{ ad inf.?}$$

Summiere:

$$9)\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots;\quad 10)\ 1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\ldots;$$

$$11)\ 16-8+4-\ldots.$$

Prüfe, ob der Grenzwert jeder der folgenden Reihe zwischen der Summe der ersten fünf und der Summe der ersten sechs Glieder liegt:

$$12)\ 4-\frac{4}{3}+\ldots;\quad 13)\ 1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ldots;$$

$$14)\ 1-(\sqrt{2}-1)+(3-2\sqrt{2})+\ldots.$$

15) Wie heißt das vierte Glied der unendlichen Reihe, deren Anfangsglied 1000 und deren Summe 10000 ist?

16) Begründe das im Rechen-Unterricht gelernte Verfahren, um einen rein-periodischen Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln durch Summierung der unendlichen Reihe:

$$\frac{a}{10^m}+\frac{a}{10^{2m}}+\ldots,$$

wo a die Periode ist und m die Anzahl ihrer Ziffern ist.

17) Warum hat es keinen Sinn, von der Summe der geometrischen Reihe $1+x+x^2+\ldots$ für $x>1$ zu sprechen?

18) Durch Multiplikation von:

$$1+x+x^2+\ldots x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$$

mit sich selbst erhält man:

$$1(1+x^{2n-2})+2(x^1+x^{2n-3})+3(x^2+x^{2n-4})+\ldots$$
$$+(n-1)(x^{n-2}+x^n)+n\,x^{n-1}$$
$$=\frac{1-2x^n+x^{2n}}{(1-x)^2}.$$

Für $x<1$ und $n=\infty$ erhält man deswegen auch bei der Reihe:

$$1+2x+3x^2+\ldots \text{ ad inf.}$$

einen Grenzwert. Wie heißt dieser?

19) Summiere mit Benutzung von Nr. 18):

$$3 + 5x + 7x^2 + \ldots \text{ ad inf. für } x < 1.$$

20) Summiere für $x < 1$: $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ ad inf.

---

§ 8. Zinseszins- und Rentenrechnung.

I) a Mark, **einmal** gezahlt, sind nach n Jahren durch Zinseszins: $a \cdot q^n$ Mark;

II) r Mark, am Schluss **jedes** Jahres, sind nach n Jahren zusammen:

$$r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ Mark.}$$

Die in § 6 und § 7 behandelten geometrischen Reihen finden ihre wichtigste Anwendung in der Zinseszins-Rechnung. Ein Kapital von a Mark trägt bei p Prozent in einem Jahre $\frac{a \cdot p}{100}$ Mark Zinsen, weil, wenn 100 Mark p Mark Zinsen geben, eine Mark $\frac{p}{100}$ Mark, also a Mark a mal soviel, d. h. $\frac{a \cdot p}{100}$ Mark Zinsen ergeben. Wenn man nun diese in einem Jahre erworbenen Zinsen zu dem Kapital von a Mark hinzufügt, so erhält man in Mark:

$$a + \frac{ap}{100}.$$

Sondert man nun a ab, so erhält man:

$$a\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

So erscheint durch die Hinzufügung der Zinsen das Kapital von a Mark mit $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ multipliziert. Diesen Faktor nennt man Vermehrungsfaktor und bezeichnet ihn mit q. Man kann also sagen, daß jedes Kapital in jedem Jahre durch Hinzufügung der Zinsen ver-q-facht wird, wo der

Vermehrungsfaktor q aus der Prozentzahl p durch die Gleichung:

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

hervorgeht. Für 3, 4, 5, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{8}$ Prozent ist der Vermehrungsfaktor q beziehungsweise:

1,03; 1,04; 1,05; 1,035; 1,0375; 1,04125.

Beispielsweise wird aus einem am Anfang eines Jahres vorhandenen Kapital von 1000 Mark am Schluß desselben bei $3\frac{1}{2}$ Prozent: 1035 Mark.

Wenn nun ein Kapital länger als ein Jahr auf Zinsen steht, und immer bei Ablauf eines Jahres die Zinsen nicht zur Auszahlung gelangen, sondern zum Kapital geschlagen werden, so ist zu beachten, daß das im ersten Jahre ver-q-fachte Kapital im zweiten Jahre wieder ver-q-facht wird, so daß nach 2 Jahren aq^2 Mark vorhanden sind. Diese werden im dritten Jahre wieder ver-q-facht, so daß nach Ablauf von 3 Jahren das ursprüngliche Kapital von a Mark zu $a \cdot q^3$ Mark geworden ist u. s. w. So erkennt man, daß das durch alljährliche Hinzufügung der Zinsen nach Ablauf von n Jahren erreichte End-Kapital von z Mark aus dem Anfangs-Kapital von a Mark durch folgende Formel hervorgeht:

$$z = a \cdot q^n,$$

wo $q = 1 + \frac{p}{100}$ ist, wenn p die Prozentzahl bedeutet. Wenn beispielsweise gefragt wird, zu wieviel Mark 6000 Mark in 27 Jahren zu $3\frac{1}{2}$ Prozent anwachsen, hat man zu setzen $a = 6000$, $q = 1{,}035$, $n = 27$ und erhält dann durch logarithmische Rechnung, daß $z = 15189{,}4$ ist, woraus folgt, daß die 6000 Mark zu 15 189 bis 15 190 Mark angewachsen sind. Man kann jede der vier durch die Formel I) verbundenen Zahlen als Unbekannte betrachten, und erhält demgemäß bei logarithmischer Rechnung:

$$\log z = \log a + n \cdot \log q$$

oder:

$$\log a = \log z - n \cdot \log q$$

oder:

$$\log q = \frac{\log z - \log a}{n}$$

oder:

$$n = \frac{\log z - \log a}{\log q}$$

Wenn z. B. jemand verpflichtet ist, in 10 Jahren 1000 Mark zu zahlen, und $3\frac{3}{4}$ Prozent gerechnet werden sollen, so hat er heute nur soviel Mark zu zahlen, daß die gezahlte Geldsumme in 10 Jahren zu 1000 Mark werde. Es ergibt sich dann aus:

$$\log a = \log 1000 - 10 \cdot \log 1{,}0375,$$

daß er nur 692 Mark zu zahlen nötig hat. Wenn ferner gefragt wird, bei wieviel Prozent sich ein Kapital in hundert Jahren verhundertfacht, ist $z = 100\,a$, $n = 100$ zu setzen, und man erhält aus:

$$\log q = \frac{\log 100 + \log a - \log a}{100} = 0{,}02,$$

daß $q = 1{,}047$ ist, also $\frac{p}{100} = 0{,}047$ und $p = 4{,}7$ ist. Namentlich für die Verzinsung in größeren Zeiträumen kann man sich daher merken, daß sich bei 4,7 Prozent ein Kapital in 100 Jahren verhundertfacht, was leicht zu behalten ist. Aus einem Pfennig wird daher bei 4,7 Prozent in 1900 Jahren 100^{19} Pfennige oder 100^{18} Mark oder 10^{36} Mark oder eine Sextillion Mark.*) Wenn endlich gefragt wird, in wieviel Jahren bei 4 Prozent aus 1000 Mark durch Zinseszins 1500 Mark werden, erhält man aus:

$$n = \frac{\log 1500 - \log 1000}{\log 1{,}04},$$

daß dies in zehn Jahren geschieht.

Wenn die Zinsen nicht nach Ablauf eines vollen Jahres, sondern alle Vierteljahre zum Kapital geschlagen werden, so ist natürlich $\frac{p}{4}$ statt p zu setzen, wenn p die für ein volles Jahr gedachte Prozentzahl ist. Dafür sind aber in jedem Jahre vier Termine zu denken, wo die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, so daß $4n$ statt n zu denken ist. Dann lautet also die Zinseszins-Formel I):

$$z = a\left(1 + \frac{p}{4 \cdot 100}\right)^{4 \cdot n}.$$

*) Vgl. des Verfassers „Mathematische Mußestunden“ (Leipzig, 1900), Band I, § 4 „Über sehr große Zahlen“.

Und wenn in jedem Jahre nicht 4 mal, sondern m mal die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, ergibt sich allgemein:

$$z = a\left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{m \cdot n}.$$

Umgekehrt kann man sich auch denken, daß erst nach Ablauf von je v Jahren die Zinsen berechnet und zum Kapital hinzugefügt werden. Dann ist in der Zinseszinsformel p mit v zu multiplizieren, n durch v zu dividieren, so daß sich ergibt:

$$z = a\left(1 + \frac{p \cdot v}{100}\right)^{\frac{n}{v}}.$$

Wenn alljährlich, n Jahre hindurch, am Schlusse jedes Jahres r Mark gezahlt werden, so würden hieraus, wenn gar keine Verzinsung stattfände, nach Ablauf der n Jahre natürlich $n \cdot r$ Mark entstehen. Wenn aber Zinseszins gerechnet wird, so ist zu beachten, daß nach Ablauf der n Jahre die zuletzt gezahlten r Mark sich noch gar nicht haben verzinsen können, daß die nach Ablauf von $n - 1$ Jahren gezahlten r Mark 1 Jahr auf Zins gestanden haben, daß die nach Ablauf von $n - 2$ Jahren gezahlten r Mark 2 Jahre auf Zinseszins gestanden haben, und so weiter, endlich, daß die zuerst, also nach Ablauf von einem Jahre, gezahlten r Mark $(n - 1)$ Jahre auf Zinseszins gestanden haben. Demnach ergibt die in der Überschrift mit I) bezeichnete Zinseszins-Formel, daß der nach Ablauf der n Jahre entstandene Gesamtwert der n mal am Schluß jedes Jahres gezahlten r Mark sich beläuft auf:

$$s = r + rq + rq^2 + \ldots rq^{n-1}$$

Mark. Nun ergibt sich aber aus der in § 6 abgeleiteten Formel für die Summe einer geometrischen Reihe, daß die soeben mit s bezeichnete Summe sich auch so ausdrücken läßt, wie hier folgt:

$$s = r\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Eine sich gleich bleibende, alljährlich erfolgende Zahlung nennt man eine Rente, und deshalb die soeben abgeleitete Formel die Rentenformel (Formel II der Überschrift). Wird

die Rente immer am Anfang statt am Schluß jedes der n Jahre gezahlt, so steht jeder Beitrag ein Jahr länger auf Zinseszins, so daß jedes Glied der obigen Reihe mit q zu multiplizieren ist. Deshalb ergibt sich in diesem Falle auch q mal soviel, d. h. soviel Mark wie

$$r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$$

angibt.

Man beachte, daß die in der Überschrift mit II) bezeichnete Rentenformel den Wert einer n Jahre lang gezahlten Rente nach Ablauf dieser n Jahre darstellt, daß man aber:

$$r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

noch durch q^n zu dividieren hat, um den Barwert der Rente auszudrücken, d. h. die Geldsumme, die für die n-maligen künftigen Zahlungen bei Beginn der n Jahre zu zahlen ist. Hiernach erhalten wir für den Barwert b einer Rente von r Mark, die n Jahre hindurch läuft:

$$b = r \cdot \frac{q^n - 1}{(q - 1) \cdot q^n},$$

wo $q = 1 + \frac{p}{100}$ ist, wenn der Berechnung p Prozent zugrunde gelegt werden.

Bei den Fragen der Zinseszins- und Rentenrechnung kommen oft die Formeln der Überschrift alle beide zur Anwendung. Wenn z. B. gefragt wird, wieviel von einer Schuld, die am 1. Januar 1903 12000 Mark betrug, am 1. Januar 1913 noch übrig ist, nachdem am Schluß jedes der Jahre 1903 bis 1912 je 1000 Mark abgezahlt ist, so ergibt sich, wenn 4 Prozent gerechnet werden, der Rest:

$$\begin{aligned} &12000 \cdot 1{,}04^{10} - 1000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} \\ &= 12000 \cdot 1{,}04^{10} - 25000\,(1{,}04^{10} - 1) \\ &= 25000 - 13000 \cdot 1{,}04^{10}. \end{aligned}$$

Denn man muß beachten, daß die am 1. Januar 1903 12000 Mark betragende Schuld bis zum 1. Januar 1913 auf

$12\,000 \cdot 1{,}04^{10}$ Mark anwächst, und daß die zehn Abzahlungen gemäß der oben entwickelten Formel, beim Beginn des Jahres 1913 zusammen

$$1000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04}$$

Mark betragen.

Bei dem Ansetzen von Renten-Aufgaben hat man namentlich darauf zu achten, ob eine gegebene Geldsumme einmal oder öfter zu zahlen ist, ob also die erste oder die zweite der Formeln der Überschrift anzuwenden ist, und außerdem darauf, daß Leistung und Gegenleistung nur dann verglichen werden dürfen, wenn beide für einen und denselben Zeitpunkt berechnet sind. Wenn z. B. gefragt wird, wieviel Mark jemand zehn Jahre hindurch von 1903 an alljährlich auf eine Bank tragen muß, damit er nach Ablauf der zehn Jahre erstens eine Summe von 4000 Mark erheben kann, und außerdem auf weitere fünfzehn Jahre alljährlich 1000 Mark sich auszahlen lassen kann, wenn 4 Prozent gerechnet werden, so ergibt sich als Ansatz:

$$x \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} = 4000 + 1000 \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{15}}.$$

Hier ist der Zeitpunkt, bezüglich dessen Leistung und Gegenleistung verglichen ist, der 31. Dezember des Jahres 1913, an welchem Tage er zum letzten Male x Mark auf die Bank bringt und zugleich 4000 Mark abhebt, um vom 31. Dezember 1914 bis zum 31. Dezember 1928 einschließlich noch weiter je tausend Mark erheben zu können. Wenn man den 31. Dezember 1928 als Zeitpunkt der Vergleichung gewählt hätte, so hätte man erhalten:

$$x \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04} \cdot 1{,}04^{15} = 4000 \cdot 1{,}04^{15} + 1000 \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04}.$$

Wenn man drittens den Anfang des Jahres 1903, an dessen Ende die ersten x Mark eingezahlt werden, als Zeitpunkt der Vergleichung gewählt hätte, so hätte man den folgenden Ansatz erhalten:

$$x \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{10}} = \frac{4000}{1{,}04^{10}} = 1000 \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{25}}.$$

Alle drei Ansätze erweisen sich natürlich als identisch.

Wenn nun in der Formel für den Barwert b einer n Jahre hindurch bei p Prozent laufenden Rente von r Mark:

$$b = r \cdot \frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{p}{100}-1\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

$$= \frac{r}{\frac{p}{100}}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}\right]$$

$$= \frac{100\,r}{p}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}\right]$$

n größer als jede noch so große Zahl setzt, so daß $\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ auch unendlich groß wird, also der reciproke Wert davon den Grenzwert 0 hat, so erhält man den Barwert einer ewigen Rente, nämlich:

$$b = \frac{100\,r}{p}$$

Dieses Resultat konnte auch aus der gewöhnlichen Zinsrechnung entnommen werden. Denn r Mark sind ja in diesem Falle die gewöhnlichen jährlichen Zinsen eines Kapitals von b Mark, so daß:

$$r = \frac{b \cdot p}{100} \text{ oder } b = \frac{100\,r}{p}$$

wird.

Die Anschauungen und Formeln der Zinseszins- und Rentenrechnung lassen sich auf alle Gebiete übertragen, wo in gleichen Zeitintervallen eine Vermehrung gemäß einer geometrischen Reihe stattfindet, namentlich auf die Gebiete der Forstwissenschaft und der Statistik. In der Assekuranz-Wissenschaft werden diese Formeln mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. § 8 im ersten Teile dieser „Niederen Analysis") verknüpft. Die Assekuranz-Mathematik hat Herr Großmann-Wien in einem besonderen Bande dieser Sammlung (Band XX) ausführlich behandelt.

Übungen zu § 8.

Wie heißt der Vermehrungsfaktor q, wenn die Prozentzahl p beträgt:

1) $p = 5$? 2) $p = 5\frac{1}{2}$? 3) $p = 2\frac{3}{4}$? 4) $p = 3\frac{7}{8}$? 5) $p = 10$? 6) $p = 3\frac{1}{3}$?

Wie heißt die Prozentzahl p, wenn der Vermehrungsfaktor q beträgt:

7) $q = 1{,}03$? 8) $q = 1{,}035$? 9) $q = 1{,}0425$? 10) $q = 1{,}03625$? 11) $q = 1{,}10$? 12) $q = 1{,}015$? 13) $q = 1{,}15$? 14) $q = 2$?

15) Welche Geldsumme wird in zehn Jahren durch Zinsenszinsen bei $4\,\%$ aus 1000 Mark?

16) Bei wieviel Prozent wird in 10 Jahren aus 100 Mark 150 Mark?

17) In wieviel Jahren wächst ein Kapital von 700 Mark zu 1000 Mark an, wenn 3 Prozent gerechnet werden?

18) In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 4 Prozent?

19) Ein neugeborener Knabe erhielt als Patengeschenk von seinem Oheim ein Sparkassenbuch mit 1000 Mark. Wieviel konnte er, als er, 16 Jahre alt, konfirmiert wurde, von der Sparkasse erheben, wenn letztere $3\frac{1}{2}$ Prozent rechnete?

20) Eine Bank, welche das eingezahlte Geld mit $3\frac{1}{2}$ Prozent verzinst, legte zehntausend Mark in Industrie-Unternehmungen an, die ihr 6 Prozent brachten. Wieviel Mark hatte die Bank nach 10 Jahren verdient?

21) Ein Wald ist auf 100000 Kubikmeter abgeschätzt. Wie groß muß derselbe nach 10 Jahren sein, wenn in dieser Zeit nichts gefällt wird, und auf 100 Kubikmeter jährlich $2\frac{1}{2}$ Kubikmeter zuwachsen?

22) Die Staatsschulden des Deutschen Reiches betrugen am 1. Januar 1883 etwa 14 Millionen Mark. Wieviel würden dieselben am 1. Januar 1905 betragen, wenn $3\frac{1}{2}\,\%$ gerechnet wird, und wenn einerseits keine neuen Schulden gemacht wären, andrerseits auch keine Amortisationen (Tilgungen, Abzahlungen) stattfänden?

23) Eine Stadt hat seit 100 Jahren so zugenommen, daß die Zunahme pro Jahr $1{,}5\,\%$ betrug. Sie hat jetzt

100 000 Einwohner. Wieviel wird sie nach 100 Jahren haben, wenn der Prozentsatz der Zunahme dauernd derselbe bleibt?

24) Wie groß ist der Barwert einer erst in fünf Jahren zahlbaren Schuld von 1000 Mark, wenn 4 % Zinzeszinsen gerechnet werden.

25) Ein Wucherer leiht jemand 700 Mark, indem er sich dafür einen Wechsel von 1000 Mark ausstellen läßt, der nach 5 Jahren zahlbar ist. Wieviel Prozent nahm der Wucherer?

26) Bei wieviel Prozent verhundertfacht sich ein Kapital in hundert Jahren, wenn die Zinsen alle halbe Jahr zum Kapital geschlagen werden?

27) Bei wieviel Prozent jährlich verhundertfacht sich ein Kapital in hundert Jahren, wenn die Zinsen nach jedem Vierteljahr zum Kapital geschlagen werden?

---

28) Jemand zahlt alljährlich bei einer Sparkasse, die $3\frac{1}{2}$ % rechnet, 1000 Mark ein, und zwar am Schluß jedes Jahres. Wieviel beträgt sein Guthaben auf der Sparkasse nach Ablauf des zwanzigsten Jahres?

29) Ein Kaufmann zahlt am 1. Januar 1904 bei einer Bank 1000 Mark ein, und wiederholt diese Zahlung am ersten Tage jedes Jahres bis zum 1. Januar 1923, so daß er also zwanzigmal die Zahlung macht. Da er am Schluß des Jahres 1923 sein Geschäft aufgibt, so läßt er sich am 31. Dezember 1923 sein Bankguthaben auszahlen, um das erworbene Vermögen selbst zu verwalten. Wie groß ist sein Guthaben, da die Bank die Depositengelder zu $3\frac{1}{2}$ % verzinst?

30) Ein Seemann schickte vom Ende des Jahres 1900 an bis zum Ende des Jahres 1920 je 600 Mark an eine Bank, die $3\frac{1}{2}$ % rechnet. Wie groß ist sein Bankguthaben am 1. Januar 1921?

31) Wieviel muß jemand vom 1. Januar 1904 an bis zum 1. Januar 1920 einschließlich auf Zinsen geben, um bei 5 % am Ende des Jahres 1920 eine Summe von 10000 Mark ausgezahlt erhalten zu können?

32) Wieviel Jahre hindurch muß man bei 4 % alljährlich am Schluß des Jahres 100 Mark auf Zinseszinsen geben, um schließlich 3000 Mark sich auszahlen zu lassen?

33) Zu einem Kapital von 50 000 Mark wird nach je einem Jahre, im ganzen zwanzigmal, 200 Mark hinzugefügt. Wie groß war das Kapital bei 4 % geworden, als eben zum zwanzigsten Male 200 Mark hinzugezahlt waren?

34) Die Staatsschulden Hamburgs betrugen am 1. Januar 1881 120 Millionen Mark. In welchem Jahre würde diese Summe bei 4 % getilgt sein, wenn von 1881 ab am Ende jedes Jahres außer den gewöhnlichen Zinsen von $4\frac{4}{5}$ Millionen Mark noch 2 Millionen mehr, also $6\frac{4}{5}$ Millionen Mark zur Amortisation hätten verwandt werden können, und keine neuen Anleihen nötig gewesen wären?

35) In wieviel Jahren kann bei 4 % eine Schuld dadurch getilgt werden, daß ihr zehnter Teil alljährlich abgezahlt wird?

36) Ein Waldbestand von 30 000 Kubikmetern soll in 20 Jahren völlig abgeholzt werden. Wieviel ist im Jahre zu schlagen, wenn der jährliche Zuwachs $2\frac{1}{2}$ % beträgt?

37) Wie groß ist der Barwert einer Rente von 500 Mark, die bei 5 % 16 Jahre lang läuft?

38) Was hat größeren gegenwärtigen Wert, eine Rente von 1200 Mark auf 16 Jahre oder von 1600 Mark auf 12 Jahre, wenn 4 % zugrunde gelegt werden?

39) Wie lange kann einem Kapital von 100 000 Mark bei 4 % alljährlich 10 000 Mark entnommen werden, damit es nach Ablauf dieser Zeit bei 5 % noch 20 Jahre lang 5000 Mark einbringen könne?

40) Wenn jemand heute die Pflicht übernimmt, 10 Jahre lang nach je einem Jahre 1000 Mark zu zahlen, so ist der Kaufpreis dieser Verpflichtung heute weniger als 10 000 Mark, nach Ablauf der 10 Jahre aber mehr als 10 000 Mark wert. Welches ist in der Zwischenzeit bei 4 % der Zeitpunkt, wo die Verpflichtung gerade 10 000 Mark wert ist?

41) Ein am 1. Mai eingezahltes Kapital von 1000 Mark wurde schon am folgenden 25. Dezember zurückverlangt. Wieviel ist auszuzahlen, wenn 3 % pro Jahr, also $\frac{3}{365}$ % pro Tag der Berechnung zugrunde gelegt werden?

42) In einer Stadt betrug der Überschuß der Geborenen über die Gestorbenen wöchentlich durchschnittlich 0,015 %, wieviel Prozent also jährlich, das Jahr zu 52 Wochen gerechnet?

43) Jemand gibt 20 000 Mark zu 3 % und 10 000 Mark zu $5\frac{1}{2}$ % auf Zinseszinsen. Nach wieviel Jahren haben beide Kapitalien gleichen Wert?

44) Zwei Kapitalien, von denen das eine um 500 Mark größer ist als das andere, wachsen bei 4 % in 20 Jahren so an, daß ihre Summe 40 000 Mark beträgt. Wie groß ist jedes dieser beiden Kapitalien?

45) Zu wieviel Prozent steht ein Kapital von c Mark, das in n Jahren zu $(c + c')$ Mark anwächst?

46) In wieviel Jahren wird ein Kapital bei p Prozent dadurch aufgezehrt, daß man ihm alljährlich q % entnimmt?

47) Wann ist bei p Prozent der Wert einer Rente von r Mark $(n \cdot r)$ Mark wert?

48) Wie groß ist bei 3 % der Barwert eines Ackers, der dauernd jährlich 3000 Mark einbringt?

49) Eine Gemeinde hat ihre ewige Verpflichtung, die ihr gehörigen Wege in Stand zu halten, dem Staate übertragen, der sich 10 000 Mark dafür hat zahlen lassen. Die Gemeinde hatte alljährlich 400 Mark zu verausgaben. Wieviel Prozent hatte der Staat gerechnet?

50) Jemand kauft sich 1904 bei einer Lebensversicherungs-Gesellschaft ein, er zahlt jährlich 500 Mark, damit seine Erben einst bei seinem Tode 10 000 Mark erhalten. In welchem Jahre müßte er sterben, damit das, was er geleistet hat, gerade gleich der Gegenleistung der Gesellschaft werde, wenn 4 % gerechnet werden?

---

§ 9. Die Zahl e als Grenzwert.

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots \text{ ad inf.} = e.$$

Der im § 5 des I. Teils dieser „Niederen Analysis“ bewiesene binomische Lehrsatz ergibt für jedes positiv-ganzzahlige n:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\cdot\frac{1}{n^n},$$

oder:

$$= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$
$$+ \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\dots\frac{n-(n-1)}{n}\cdot\frac{1}{n!}$$
$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Da die in Klammern gesetzten Differenzen positive echte Brüche sind, so erkennt man ohne weiteres, daß die für $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ erhaltene Summe, falls $n > 1$ ist, größer als 2 wird. Um auch eine obere Grenze für diese Summe zu finden, zerlegen wir dieselbe in zwei Teile, erstens die Summe s_k der ersten k Glieder, wo $k < n$ ist, zweitens den Rest r_k, d. h. die Summe aller noch fehlenden nachfolgenden Glieder, so daß wir setzen:

$$s_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \dots$$
$$+ \frac{1}{(k-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-2}{n}\right),$$

und:

$$r_k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$+ \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Da nun das erste Glied der für r_k gebildeten Summe als Faktor in allen folgenden Gliedern steckt, so können wir diesen Faktor

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

absondern, und erhalten dann für die Summe t_k, mit der dieser Faktor zu multiplizieren ist:

$$t_k = 1 + \frac{1-\frac{k}{n}}{k+1} + \frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)}{(k+1)(k+2)} + \dots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k+1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{(k+1)(k+2)\dots n}$$

Da nun $k<n$ vorausgesetzt ist, so sind die bei t_k in den Zählern auftretenden, in Klammer gesetzten Faktoren sämtlich kleiner als 1. Man erhält also Größeres als t_k, wenn man alle diese Faktoren gleich 1 setzt. Ebenso erhält man Größeres als t_k, wenn man die im Nenner auftretenden Faktoren $k+1$, $k+2$, $k+3, \dots n$ sämtlich durch $k+1$ ersetzt, so daß aus doppeltem Grunde:

$$t_k < 1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^{n-k}}.$$

Wenn wir nun die in § 6 abgeleitete Summenformel auf die hier rechts von t_k stehende geometrische Reihe anwenden, so erhalten wir:

$$t_k < \frac{1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{n-k+1}}{1-\frac{1}{k+1}}.$$

Bei dem soeben erhaltenen Bruche multiplizieren wir nun Zähler und Nenner mit $k+1$. Dadurch erhalten wir:

$$t_k < \frac{k+1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{n-k}}{k+1-1},$$

also erst recht:

$$t_k < \frac{k+1}{k}.$$

Da ferner in dem oben abgesonderten Faktor, der mit t_k multipliziert ist, $\frac{1}{k!}$ mit lauter Brüchen multipliziert wird, die, weil $k < n$ ist, kleiner als 1 sind, so ist dieser Faktor

$$< \frac{1}{k!}.$$

Demnach ist:

$$r_k < \frac{1}{k!} \cdot \frac{k+1}{k}.$$

Wird z. B. $k = 5$ gewählt, so wird hieraus:

$$r_k < \frac{1}{5!} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1}{100}, \text{ also } r_k < 0{,}01.$$

Bei $k = 6$ wird r_k schon kleiner als 0,002. Man erkennt, daß bei unbegrenzt wachsendem k die Summe r_k dem Grenzwert 0 zustrebt, und daß deshalb die Entwickelung von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ gleich s_k wird. Die Zahl n, die größer als k ist, kann man sich immer so groß wählen, daß die Brüche

$$1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ \ldots,\ 1-\frac{k-2}{n},$$

und dadurch auch Produkte von ihnen, durch die Zahl Eins ersetzbar sind. Deshalb erhalten wir das Resultat:

Wenn die natürliche Zahl n unbegrenzt wächst, so nähert sich:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

einem bestimmten, berechenbaren Grenzwerte, den man immer genauer erhält, je mehr man Glieder in der Summe:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\frac{1}{(k-1)!}+\ldots \text{ ad inf.}$$

bei der Berechnung berücksichtigt. Wenn man die Berechnung bis auf k Glieder fortsetzt, so ist der Fehler, den man dadurch begeht, daß man nicht noch mehr Glieder berechnet hat, kleiner als

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{k+1}{k}.$$

Die soeben definierte, als Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bei unbegrenzt wachsendem n gefundene Zahl spielt in der höheren Mathematik eine fundamentale Rolle, und sie wird deshalb, etwa wie die Zahl π in der Geometrie, durch einen bestimmten Buchstaben, nämlich den Buchstaben e, bezeichnet.

Daß die Zahl e größer als 2 ist, folgt daraus, daß man, um sie zu berechnen, noch zu $1+\frac{1}{1!}=2$ positive Brüche addieren muß. Daß sie kleiner als 3 ist, folgt daraus, daß, wie oben gezeigt ist, der Fehler, den man begeht, wenn man $e=2$ setzt, kleiner als $\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2}$, d. h. kleiner als $\frac{3}{4}$, wird. Daß aber e überhaupt gleich keiner rationalen Zahl ist, sondern eine irrationale Zahl ist, kann auf folgende Weise erkannt werden.

Wäre die Zahl e gleich einer rationalen Zahl, so müßte deren Nenner größer als 1 sein, da e zwischen 2 und 3 liegt und deshalb nicht ganzzahlig sein kann. Demgemäß nehmen wir an, daß $e=\frac{a}{b}$ wäre, wo a und b ganze Zahlen sind und $b>1$ ist. Nach dem Obigen aber hat e als untere Grenze:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{(k-1)!},$$

und als obere Grenze:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{(k-1)!}+\frac{1}{k!}\cdot\frac{k+1}{k}.$$

Deshalb erhalten wir, wenn wir k gleich der ganzen Zahl $b+1$ setzen:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{b!}<e<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{b!}+\frac{b+2}{(b+1)!(b+1)}.$$

Hieraus folgt aber durch Multiplikation mit b! und durch die Annahme, daß e gleich der rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ wäre:

$$b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2:} + \ldots + 1 < a(b-1)! < b! + \frac{b!}{1!} + \ldots + 1 + \frac{b+2}{(b+1)^2}.$$

Da nun b! immer durch c! teilbar ist, wenn $c < b$ ist, so steht in dieser Vergleichung links eine Summe von ganzen Zahlen, also eine ganze Zahl, die wir g nennen wollen. So kommt:

$$g < a(b-1)! < g + \frac{b+2}{b(b+2)+1}.$$

Hierdurch ist die ganze Zahl $a(b-1)!$ in zwei Grenzen eingeschlossen, von denen die eine die ganze Zahl g izt, die andere um $\frac{b+2}{b(b+2)+1}$ größer ist, als g. Nun ist aber, da b größer als 1 ist, $b(b+2) > b+2$ und daher auch $b(b+2)+1$ größer als $b+2$. Also ist die obere Grenze um einen Bruch größer als die untere Grenze g, der sich kleiner als 1 erweist. Es ist demnach durch unsere Ungleichung die ganze Zahl $a(b-1)!$ in zwei Grenzen eingeschlossen, von denen die untere eine ganze Zahl g ist, die obere Grenze aber kleiner als die nächstfolgende ganze Zahl $g+1$ ist, was unmöglich ist. Unsere Annahme, die Zahl e sei rational, hat uns also zu einer Unmöglichkeit geführt. Demnach ist e als Irrtionalzahl erkannt.

Da bei einer Basis, die größer als 1 ist, $\log c > \log d$ ist, wenn c größer als d ist, so bleiben die obigen Ungleichheits-Betrachtungen auch richtig, wenn man immer zu den Logarithmen für die Basis f, die wir > 1 voraussetzen, übergeht. Demnach muß bei unbegrenzt wachsendem n auch der Logarithmus von

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sich dem Logarithmus von e zur Basis f mehr und mehr nähern, je größer n wird. Demnach ist:

$$\lim_{n=\infty} n \cdot \overset{f}{\log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \overset{f}{\log} e.$$

Wenn man hier $\frac{1}{n} = x$ setzt, so erhält man, da dann bei unbegrenzt werdendem n x unendlich klein wird:

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x} \cdot \overset{f}{\log}(1+x) = \overset{f}{\log} e \text{ (für } f > 1).$$

Übungen zu § 9.

Wie groß ist höchstens der begangene Fehler, wenn man die Summe der ersten k Glieder der Reihe für e gleich e setzt, wenn:

1) $k = 4$; 2) $k = 6$; 3) $k = 9$; 4) $k = 10$; 5) $k = 12$ ist?

6) Warum ist $e < \frac{11}{4}$?

7) Wieviel Glieder der Reihe für e muß man addieren, um zu erkennen, daß $e > 2{,}7$ ist?

8) Wieviel Glieder der Reihe für e muß man addieren, um zu erreichen, daß die erhaltene Summe um weniger als ein Tausendstel kleiner ist als e?

9) Da $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ das Quadrat von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ist, so muß man als Grenzwert der binomischen Entwickelung von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ das Quadrat e^2 der Zahl e erhalten. Berechne hiernach e^2 auf vier Stellen durch binomische Entwickelung.

10) Warum ist e^2 irrational?

11) Warum ist $\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n} = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$?

12) Berechne $\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$.

13) Bestimme für verschwindend kleine x den Grenzwert von: a) $\overset{10}{\log}(1+2x)\cdot\frac{1}{x}$; b) $\frac{1}{x}\overset{10}{\log}\left(1+\frac{1}{2}x\right)$.

II. Abschnitt.

Reihen.

§ 10. Konvergenz der Reihen.

Schon in § 9 haben wir mit einer unendlichen Reihe zu tun gehabt, deren Summe sich einem ganz bestimmten Grenzwert nähert, so daß der Unterschied zwischen der Summe der ersten n Glieder und diesem Grenzwert um so kleiner wird, je größer n wird.

Allgemeiner seien

$$g_1, g_2, g_3, \cdots g_n$$

die n ersten Glieder einer gesetzmäßigen Reihe von Zahlen, wo unter „gesetzmäßig" zu verstehen ist, daß jedes Glied g_i von seiner Nummer i in erkennbarer Weise abhängt. So zeigt die Reihe

$$x, x^2, x^3, \ldots x^n$$

das Gesetz, daß das i-te Glied g_i die i-te Potenz von x ist. So zeigt ferner die Reihe

$$\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \cdots \frac{1}{n!}$$

das Gesetz, daß das i-te Glied der reziproke Wert von i! ist. Man kann dann bei einer solchen gesetzmäßigen Reihe von der Summe s_n der ersten n Glieder sprechen. Wenn dann die positive ganze Zahl n unbegrenzt wächst, so wird aus der endlichen Reihe eine unendliche Reihe. Dabei kann es vorkommen, daß sich s_n mit unbegrenzt wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze s nähert, daß also

$$\lim_{n=\infty} s_n = s$$

werde. In diesem Falle heißt die Reihe konvergent. So hat, wie aus § 7 hervorgeht, die Summe:

$$s_n = x + x^2 + \ldots + x^n$$

den Grenzwert:

$$s = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1-1+x}{1-x} = \frac{x}{1-x}, \text{ falls } x < 1 \text{ ist.}$$

Ferner hat, wie aus § 9 hervorgeht, die Summe:

$$s_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

den Grenzwert:

$$e - 1 = 1{,}7182818\ldots$$

Den Grenzwert, dem sich die Summe der n ersten Glieder einer unendlichen konvergenten Reihe bei unbegrenzt wachsendem n mehr und mehr nähert, heißt kurz Summe der unendlichen Reihe. Da der Unterschied zwischen der Summe s_n der n ersten Glieder und der Summe der Reihe selbst immer kleiner wird, wenn n wächst, so muß auch der Unterschied zwischen der Summe s_n der n ersten Glieder und der Summe s_{n-1} der $n-1$ ersten Glieder, d. h. aber das n-te Glied g_n bei unbegrenzt wachsendem n unendlich klein werden. Wir haben also den Satz:

Die Glieder einer konvergenten Reihe müssen von einer bestimmten Stelle ab immer kleiner und schließlich unendlich klein werden.

Man darf aber diesen Satz nicht umkehren, d. h. man darf nicht daraus, daß die Glieder einer Reihe schließlich unendlich klein werden, folgern, daß die Reihe konvergent sein muß. Das beste Beispiel hierfür zeigt die harmonische Reihe, das ist die Summe der reziproken Werte der natürlichen Zahlen, also:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \text{ ad inf.}$$

Bei dieser Reihe werden, sogar von Anfang an, die Glieder immer kleiner, und werden bei unbegrenzt wachsendem n unendlich klein. Trotzdem ist die Reihe divergent, d. h. ihre Summe nähert sich keinem bestimmten endlichen Grenzwert, sondern wird bei unbegrenzt wach-

sendem n größer als jede noch so große Zahl. Dies kann man auf folgende Weise einsehen. Man denke sich $\frac{1}{2}$, dann $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, dann $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ u. s. w. je in eine Klammer eingeschlossen, so daß also jede Klammer mit dem reziproken Werte einer Potenz der Zahl Zwei schließt, also die p-te Klammer folgendermaßen heißt:

$$\frac{1}{2^{p-1}+1}+\frac{1}{2^{p-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^p}.$$

Dann sind in einer solchen Klammer alle Glieder bis zum vorletzten größer als das letzte Glied. Die p-te Klammer aber enthält 2^{p-1} Addenden, und als letztes Glied $\frac{1}{2^p}$. Demnach ist die in der p-ten Klammer stehende Summe größer als $2^{p-1}\cdot\frac{1}{2^p}=\frac{1}{2}$. Demnach ist die Summe:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

bis zur p-ten Klammer einschließlich größer als:

$$1+\frac{1}{2}\cdot p,$$

wird daher bei unbegrenzt wachsendem p und also auch bei unbegrenzt wachsendem n größer als jede noch so große Zahl. Die harmonische Reihe der reziproken Werte der natürlichen Zahlen ist daher divergent, obwohl ihre einzelnen Glieder immer kleiner werden und Null als Grenzwert haben. Bezeichnet man immer mit u_n das n-te Glied, mit s_n die Summe der ersten n Glieder, so bietet die harmonische Reihe ein Beispiel dafür, daß:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0 \text{ und doch } \lim_{n=\infty} s_n = \infty \text{ ist.}$$

Bisher hatten wir immer vorausgesetzt, daß alle Glieder der Reihe positiv sind, und daß deshalb immer $s_{n+1} > s_n$ ist. Aber in § 7 haben wir schon eine unendliche Reihe kennen gelernt, bei der die Glieder abwechselnde Vorzeichen haben, nämlich:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \text{ ad inf.},$$

bei welcher, falls $x < 1$ ist, die Summe der n ersten Glieder dem Grenzwert:

$$\frac{1}{1+x}$$

um so näher kam, je größer n angenommen wurde. Bei einer solchen Reihe mit abwechselnden Vorzeichen kann es aber auch vorkommen, daß sie nicht konvergent ist, indem die Summe der n ersten Glieder bei unbegrenzt wachsendem n keinen bestimmten Grenzwert besitzt, sondern den einen oder den andern von zwei Grenzwerten hat, je nachdem n gerade oder ungerade ist, je nachdem also die Reihe bis zu einem negativen oder bis zu einem positiven Gliede berechnet ist. Das einfachste Beispiel für eine solche Reihe ist:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Hier erscheint 0 als Summe der Reihe, wenn die Anzahl n der Glieder gerade ist, oder, was dasselbe ist, wenn das letzte berücksichtigte Glied minus eins war, dagegen 1 als Summe der Reihe, wenn die Anzahl n der Glieder ungerade ist oder, was dasselbe ist, wenn das als letztes gewählte Glied plus Eins war. Es ergeben sich also, je nachdem n gerade oder ungerade ist, die beiden Grenzwerte 0 und 1. Eine derartige Reihe nennt man oszillierend. Oszillierende Reihen nennt man nicht konvergent. Darum gehörte zur Definition der Konvergenz einer Reihe nicht allein, daß sie einen endlichen Grenzwert hat, sondern, daß sie einen einzigen bestimmten endlichen Grenzwert hat. Weitere oszillierende Reihen ergeben sich aus der obigen dadurch, daß man zu ihren einzelnen Gliedern die Glieder einer konvergenten Reihe, z. B. einer geometrischen Reihe, addiert, indem man immer die Summe der beiden Glieder, die in beiden Reihen dieselbe Nummer haben, als Glied der neu zu bildenden nimmt. Soll z. B. die geometrische Reihe:

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \frac{81}{256} + \ldots$$

mit der Summe 4 dazu verwendet werden, so ergibt sich als neue oszillierende Reihe:

$$2 - \frac{1}{4} + 1\frac{9}{16} - \frac{37}{64} + 1\frac{81}{256} - \ldots$$

Je nachdem man hier mit einem positiven oder negativen Gliede schließt, nähert man sich dem Grenzwert:

$$1 + 4 = 5$$

oder dem Grenzwert:

$$0 + 4 = 4.$$

Zur schnelleren Entscheidung darüber, ob eine Reihe konvergiert, dienen die Konvergenzregeln, von denen die wichtigsten hier folgen.

Erste Konvergenzregel: Wenn m eine endliche Zahl ist, und eine Reihe ist vom m-ten Gliede an konvergent, so ist sie überhaupt konvergent. Bezeichnet nämlich t den Grenzwert, dem die Summe aller unendlich vielen Glieder vom m-ten an zustrebt, und a die Summe der $m-1$ ersten Glieder, so ist die bestimmte endliche Zahl $a+t$ der Grenzwert, dem die Summe der ganzen Reihe zustrebt.

Zweite Konvergenzregel (Leibnizsches Kriterium): Wenn der absolute Betrag der Glieder einer Reihe mit abwechselnden Vorzeichen immer kleiner und schließlich unendlich klein wird, so ist die Reihe konvergent. Die Reihe heiße:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots,$$

dann soll sein:

$$u_{n+1} < u_n \text{ und } \lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Wenn man nun in folgender Weise je zwei Glieder zuzammenfaßt:

$$s_{2m} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \ldots (u_{2m-2} - u_{2m-1})$$

und:

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) \ldots - (u_{2m-1} - u_{2m}),$$

so sind die in Klammern eingeschlossenen Differenzen sämtlich positiv, weil nach Voraussetzung:

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3 \text{ u. s. w.}$$

ist. Also ist:

$$s_{2m} > 0 \text{ und } s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m} < u_0.$$

Oder:

$$0 < s_{2m} < s_{2m+1} < u_0.$$

Demnach besitzt die unendliche Reihe:

$$(u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \ldots \text{ ad inf.},$$

deren erstes Glied $u_0 - u_1$, deren zweites $u_2 - u_3$ u. s. w. heißt, lediglich positive Glieder und die Summe ihrer ersten m Glieder bleibt kleiner als die endliche Größe u_0. Demnach hat s_{2m} bei unbegrenzt wachsendem m einen bestimmten endlichen Grenzwert, der s heiße. Aus $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m}$ folgt aber dann, weil $\lim_{m=\infty} u_{2m} = 0$ sein soll, daß dann auch s_{2m+1} bei unbegrenzt wachsendem m denselben Grenzwert s hat, so daß die unendliche Reihe:

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots \text{ ad inf.},$$

gleichviel ob n gerade oder ungerade ist, einen einzigen bestimmten endlichen Grenzwert besitzt. Damit ist unsere zweite Konvergenzregel bewiesen. Ein Beispiel hierfür bietet die Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

deren Grenzwert uns in § 13 begegnen wird.

Dritte Konvergenzregel: Wenn eine Reihe mit lauter positiven Gliedern konvergiert, so muß auch die Reihe konvergieren, die man erhält, wenn man den Gliedern gerader Nummer das negative statt des positiven Vorzeichens gibt. Denn wenn die Reihe:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots,$$

wo $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sämtlich positiv sind, eine bestimmte endliche Summe besitzt, so muß dies auch bei:

$$u_2 + u_4 + u_6 + \ldots$$

der Fall sein, also auch bei:

$$2(u_2 + u_4 + u_6 + \ldots)$$

Durch Subtraktion aber erhält man dann, daß auch

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

konvergieren muß. Beispielsweise kann man daraus, daß die im § 9 behandelte Reihe:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \text{ ad inf.}$$

den bestimmten endlichen Grenzwert

$$e = 2{,}7182818$$

besitzt, wie dort gezeigt ist, nach dieser Konvergenzregel schließen, daß auch:

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots \text{ ad inf.}$$

eine bestimmte endliche Summe haben muß. Von dieser werden wir aus § 12 erkennen, daß sie gleich:

$$\frac{1}{e} = 0{,}3678794$$

sein muß.

Vierte Konvergenzregel (Cauchysches Kriterium): Wenn bei einer Reihe mit lauter positiven Gliedern der Quotient, dessen Dividendus das $n+1$-te Glied und dessen Divisor das n-te Glied ist, kleiner als 1 ist und auch bei unbegrenzt wachsendem n einen von n unabhängigen Grenzwert hat, der kleiner als 1 ist, so ist die Reihe konvergent. Denn, wenn bei der Reihe:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \text{ ad inf.}$$

p eine Zahl ist, die zwar kleiner als 1, aber doch größer ist als der größte unter allen Quotienten:

$$\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \frac{u_4}{u_3}, \ldots \text{ ad inf.},$$

so muß sein:

$$u_2 < u_1 \cdot p$$
$$u_3 < u_2 \cdot p < u_1 p^2$$
$$u_4 < u_3 \cdot p < u_1 p^3$$
u. s. w.

Also muß die Summe der Reihe kleiner sein, als

$$u_1 (p + p^2 + p^3 + p^4 + \ldots),$$

wo p kleiner als 1 ist. Nun hat aber, da $p < 1$ ist, nach § 7 die Summe:

$$p + p^2 + p^3 + \ldots \text{ ad inf.}$$

den Grenzwert $\frac{p}{1-p}$. Die Reihe ist also konvergent, da ihre Summe kleiner als die endliche Zahl:

$$\frac{u_1 \cdot p}{1-p}$$

sein muß. Beispielsweise ist die Reihe:

$$1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\ldots \text{ ad inf.}$$

konvergent, weil:

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{u_3}{u_2}=\frac{1}{4\cdot 5},\ \frac{u_4}{u_3}=\frac{1}{6\cdot 7} \text{ u. s. w.}$$

ist, und weil auch

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{(2n+1)2n}$$

bei unbegrenzt wachsendem n den Grenzwert Null hat.

Man beachte bei den drei letzten Konvergenzregeln besonders, daß wegen der ersten Konvergenzregel die angegebenen Bedingungen nicht vom ersten Gliede an, sondern nur vom m-ten an erfüllt zu sein brauchen, wo m eine endliche Zahl ist.

Übungen zu § 10.

1) Zeige, daß die Summe der Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$ größer wird, als jede noch so große Zahl.

2) Zeige, daß auch die Reihe $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$ divergent ist.

Gib die Summen der folgenden Reihen an (§ 7):

3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ ad inf.; 4) $1+\frac{3}{4}+\frac{9}{16}+\frac{27}{64}+\ldots$ ad inf.;

5) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ ad inf.; 6) $a-aq+aq^2-aq^3+\cdots$ ad inf. für $q<1$.

Welche Summen haben die folgenden Reihen: a) für $x > 1$, b) für $x = 1$, c) für $x < 1$:

7) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$? 8) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$?

9) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$? 10) $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \ldots$?

11) Warum konvergiert eine Reihe mit lauter positiven Gliedern, wenn jedes Glied g derselben kleiner ist, als dasjenige Glied einer konvergenten Reihe, dessen Nummer um p größer ist, als die Nummer von g, wo p eine endliche Zahl ist?

12) a) Warum oszilliert die Summe der folgenden Reihe zwischen zwei Werten hin und her:

$$2 - \frac{2}{3} + \frac{10}{9} - \frac{26}{27} + \frac{82}{81} - \frac{242}{243} + \ldots?$$

b) Wie heißen diese beiden Werte?

13) Warum ist konvergent:

$$x^4 + x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \ldots \text{ für } x < 1?$$

14) Beweise die Konvergenz der Reihe:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

15) Stelle den Konvergenzbereich der folgenden Reihe fest: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, d. h. gib den größten und den kleinsten Wert von x an, für den die Reihe konvergiert.

16) Warum muß nach dem zweiten Konvergenz-Satze konvergent sein:

$$\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \ldots?$$

17) Man weiß, daß konvergent ist:

$$\frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2^2} + \frac{3 \cdot 4}{2^3} + \frac{4 \cdot 5}{2^4} + \ldots$$

Warum muß nun auch folgende Reihe konvergent sein:

$$\frac{1\cdot 2}{2}-\frac{2\cdot 3}{2^2}+\frac{3\cdot 4}{2^3}-\frac{4\cdot 5}{2^4}+\ldots?$$

Beweise nach dem Cauchyschen Konvergenz-Kriterium die Konvergenz der folgenden Reihen:

18) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\ldots$; 19) $\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$;

20) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\frac{5}{243}+\ldots$; 21) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots$

Stelle den Konvergenzbereich der folgenden Reihen fest:

22) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$; 23) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$;

24) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$; 25) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots$;

26) $1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\ldots$; 27) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\ldots$

---

§ 11. Die Methode der zu bestimmenden Koeffizienten.

Unter den unendlichen Reihen sind besonders diejenigen wichtig, in denen die einzelnen, zu summierenden Glieder von der Form

$$a_i \cdot x^i$$

sind, wo a_i eine Konstante und x^i die i-te Potenz der Variabeln x ist. Man ordnet solche Reihen, indem man für i nacheinander die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... setzt und davor eine Konstante a_0 additiv hinzusetzt. Die allgemeine Form einer solchen Reihe, die man Potenzreihe nennt, ist demgemäß:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Die in § 3 besprochenen ganzen Funktionen von x sind spezielle Fälle der Potenzreihen, weil, wenn eine solche Funktion n-ten Grades ist, sie als Potenzreihe angesehen werden kann, in der alle Koeffizienten

$$a_{n+1},\ a_{n+2},\ a_{n+3},\ \ldots$$

unaufhörlich den Wert Null haben. Wenn eine unendliche Potenzreihe konvergent ist, so hat sie eine bestimmte endliche Summe y, die von x abhängt, und deshalb irgend eine Funktion von x ist. Man nennt diese Funktion dann in eine Potenzreihe entwickelt. Aus dem Begriff der Konvergenz folgt, daß in eine und dieselbe Potenzreihe nicht zwei verschiedene Funktionen entwickelt werden können. Daß auch umgekehrt eine und dieselbe Funktion nicht in zwei verschiedene Potenzreihen entwickelt werden kann, ist aus der folgenden Überlegung evident. Wir setzen voraus, daß eine und dieselbe Funktion y in zwei verschiedene Potenzreihen entwickelt werden könnte, die beide nicht allein für $x = 0$, sondern auch für irgend einen von Null verschiedenen Wert von x konvergent wären. Bezeichnet man dann die Koeffizienten der beiden Potenzreihen mit

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots \text{ bezw. } b_0,\ b_1,\ b_2, \ldots,$$

so müßte einerseits sein:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

andrerseits aber auch:

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots,$$

woraus durch Subtraktion folgen würde:

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \ldots$$

Nach der gemachten Voraussetzung muß diese Gleichung für $x = 0$ richtig sein. Setzt man diesen Wert ein, so erhält man:

$$0 = a_0 - b_0 \text{ oder } a_0 = b_0.$$

Hierdurch wird aus der obigen Gleichung:

$$0 = (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + (a_3 - b_3) x^3 + \ldots.$$

Da nach der Voraussetzung diese Gleichung auch für einen von Null verschiedenen Wert von x richtig sein muß, so darf man durch x dividieren, und erhält:

$$0 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) x + (a_3 - b_3) x^2 + \ldots.$$

Nun kann man wieder $x = 0$ setzen, daraus $a_1 = b_1$ schließen, darauf durch x dividieren, und dann dieses mit Setzen von $x = 0$ beginnende Verfahren immerzu fortsetzen. Auf solche Weise erkennt man, daß

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3 \text{ u. s. w.}$$

sein muß, daß also die als verschieden angenommenen Reihen identisch werden, weil die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x als einander gleich bewiesen sind. Unser Resultat lautet also, daß, wenn eine Funktion von x überhaupt in eine Potenzreihe verwandelt werden kann, dies nur auf einerlei Art geschehen kann. In anderer Fassung lautet dieses Resultat:

Wenn zwei Potenzreihen für $x = 0$ und für Werte von x, die von Null verschieden sind, einander gleich sind, so dürfen die Koeffizienten a_i und b_i jeder Potenz x^i einander gleich gesetzt werden.

Aus diesem Satze folgt unmittelbar der Zusatz:

Wenn eine Potenzreihe für $x = 0$ und für Werte von x, die von Null verschieden sind, immer Null ist, so muß jeder Koeffizient dieser Potenzreihe einzeln gleich Null sein.

Diese Sätze liefern ein vorzügliches Mittel, um eine Funktion in eine Potenzreihe zu verwandeln, nur muß immer eine Konvergenz-Untersuchung stattfinden, um den Konvergenz-Bereich festzustellen, d. h. dasjenige den Wert Null mit enthaltende Intervall $x = c$ bis $x = d$, das alle Zahlen enthält, welche für x gesetzt werden dürfen, damit der resultierende Funktionswert gleich dem Werte ist, der sich aus der Potenzreihe durch Summierung ihrer Glieder ergibt.

Als Beispiel wählen wir die Funktion:

$$y = \frac{1}{1 - 2x + x^2},$$

die wir in eine Potenzreihe entwickeln wollen. Demgemäß setzen wir an:

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

oder:

$$1 = (1 - 2x + x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots).$$

Links steht nur das von x freie Glied 1, rechts kommt aber durch Lösung der Klammern:

$$a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1 + a_0)x^2 + (a_3 - 2a_2 + a_1)x^3 + \ldots.$$

Wenn wir also die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich setzen, erhalten wir:

$$1 = a_0;\ 0 = a_1 - 2a_0;\ 0 = a_2 - 2a_1 + a_0;$$
$$0 = a_3 - 2a_2 + a_1;\ 0 = a_4 - 2a_3 + a_2;\ \text{u. s. w.}$$

Aus dieser unendlichen Kette von Gleichungen ergibt sich aber nacheinander:

$$a_0 = 1;\ a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_3 = 4;\ a_4 = 5;\ \text{u. s. w.}$$

Man erkennt leicht das Koeffizienten-Gesetz, nämlich:

$$a_i = i + 1.$$

Wir dürfen also für gewisse Werte von x, die durch die Konvergenz-Untersuchung noch festzustellen sind, die Funktion

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2}$$

mit der Reihe:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots.$$

identifizieren. Um den Konvergenz-Bereich festzustellen, benutzen wir das in § 10 bewiesene Cauchysche Kriterium, das dort als vierte Konvergenzregel bezeichnet ist. Wir erhalten für das $(n+1)$-te Glied:

$$u_{n+1} = (n+1)\,x^n$$

und für das n-te:

$$u_n = n x^{n-1},$$

Deshalb ergibt sich:

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{n+1}{n} \cdot x.$$

Es fragt sich also, was für x gesetzt werden muß, damit

$$\frac{n+1}{n} x$$

kleiner als 1 werde. Man weiß ferner aus der ersten Konvergenzregel, daß diese Bedingung nur von einer bestimmten Stelle an erfüllt zu werden braucht. Die Bedingung ist dann aber immer erfüllbar, sobald man $x < 1$ wählt. Ist x z. B. $\frac{9}{10}$,

so muß von der zehnten Stelle an $\frac{n+1}{n} \cdot x$ kleiner als 1 werden, nämlich $\frac{11}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{99}{100}$. Es fragt sich, bei Anwendung des Cauchyschen Kriteriums, zweitens, ob

$$\lim \frac{u_n + 1}{u_n} = \lim \frac{n+1}{n} \cdot x = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) x$$

für ein unbegrenzt wachsendes n kleiner als 1 werde. Dies ist aber der Fall, wenn $x < 1$ ist, weil

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ ist.}$$

Der Konvergenzbereich der Potenzreihe:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

ist also:

$$0 \leqq x < 1.$$

Wenn wir in der innerhalb dieses Konvergenzreiches gültigen Gleichung:

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^4 + \ldots.$$

x in $-x$ verwandeln, so erhalten wir:

$$\frac{1}{1 + 2x + x^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^4 + \ldots.$$

Diese Reihe ist für $x < 1$ nach der dritten Konvergenzregel deshalb konvergent, weil von der Potenzreihe

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^4 + \ldots$$

oben bewiesen wurde, daß sie für $x < 1$ konvergent ist. Wir können demnach sagen, daß die Gleichung

$$\frac{1}{1 - 2x + x^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

den Konvergenzbereich:

$$-1 < x < +1$$

hat, d. h. richtig ist, wenn x diese Ungleichheits-Bedingung erfüllt.

Übungen zu § 11.

1) Was folgt daraus, daß sich für $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$ dieselbe Potenzreihe ergibt, wie für $\frac{1}{2}(1-\cos x)$?

2) Was folgt daraus, daß für $-1<x<+1$ stets die folgende Gleichung richtig ist:

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots = d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots?$$

3) Was folgt daraus, daß für jedes x die folgende Gleichung richtig ist:

$$0=(a_0-1)x+(a_1-2)x^2+(a_2-3)x^2+(a_3-4)x^3+\ldots.?$$

4) Wenn für unzählig viele Werte von x, 0 eingeschlossen, die Gleichung

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots = A+Bx+Cx^2+\ldots$$

richtig ist, was folgt dann über die Koeffizienten A, B, C,...?

5) Wenn für jedes x richtig ist:

$$1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots = a_1+2a_2x+3a^2x^2+\ldots,$$

welche Werte haben die Koeffizienten a_1, a_2, a_3,....?

6) Bestimme a_0, a_1, a_2, a_3, ... aus der für $x<1$ richtigen Gleichung $1=(1+2x+x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)$.

Bestimme die Koeffizienten in den nachfolgenden Gleichungen, welche für $-g<x<+h$ richtig sind, wo g und h positiv sind:

7) $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$

8) $1+x=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)^2$.

9) $\frac{1}{1-x}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots$

10) Entwickele $\frac{1}{1+x+x^2}$ in eine Potenzreihe und gib den Konvergenzbereich der entstandenen Reihe an.

11) Entwickele $\sqrt[3]{1+x}$ in eine Potenzreihe und gib deren Konvergenzbereich an.

12) Entwickele $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ in eine Potenzreihe.

---

§ 12. Die Exponentialreihen.

I) $$b^x = 1 + \frac{x}{1!}\frac{\log b}{\log e} + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\log b}{\log e}\right)^2 + \ldots$$

II) $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Um nach der in § 11 erörterten Methode b^x in eine Potenzreihe zu verwandeln, setzen wir an:

$$b^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Da für $x = 0$ rechts a_0, links $b^0 = 1$ kommt, so dürfen wir von vornherein $a_0 = 1$ setzen. Um nun auch die übrigen Koeffizienten zu bestimmen, müssen wir eine fundamentale Eigenschaft der Funktion von b^x benutzen, wo x variabel, b konstant ist. Wir benutzen:

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y},$$

indem wir zweitens ansetzen:

$$b^y = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$$

und die beiden angesetzten Gleichungen multiplizieren. So erhält man:

$$b^{x+y} = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(1 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots)$$

Da nun b^{x+y} gleich der Potenzreihe ist, die aus der zuerst angesetzten entsteht, indem man x durch $x + y$ ersetzt, so erhält man:

$$1 + a_1 (x + y) + a_2 (x + y)^2 + a_3 (x + y)^3 + \ldots$$
$$= (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)(1 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$$

Nun setzen wir den sich links ergebenden Koeffizienten von y gleich dem sich rechts ergebenden Koeffizienten von y, wodurch wir erhalten:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots$$
$$= a_1 + a_1a_1x + a_1a_2x^2 + a_1a_3x^3 + \ldots$$

Hier sind zwei nach x entwickelte Potenzreihen einander gleich gesetzt. Wir dürfen daher die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich setzen, und erhalten so die folgende Kette von Gleichungen:

$$a_1 = a_1;\ 2a_2 = a_1a_1;\ 3a_3 = a_1a_2;\ 4a_4 = a_1a_3; \ldots$$

Hieraus aber ergibt sich nacheinander:

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2};\ a_3 = \frac{a_1^3}{2\cdot 3};\ a_4 = \frac{a_1^4}{2\cdot 3\cdot 4};\ a_5 = \frac{a_1^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5};\ \text{usw.}$$

Setzen wir diese Resultate in die ursprünglich für b^x angesetzte Potenzreihe ein, so erhalten wir:

$$b^x = 1 + \frac{a_1x}{1} + \frac{a_1^2x^2}{2!} + \frac{a_1^3x^3}{3!} + \frac{a_1^4x^4}{4!} + \frac{a_1^5x^5}{5!} + \ldots$$

Die gefundene Potenzreihe enthält einen Koeffizienten a_1, dessen Wert noch nicht bestimmt werden konnte. Dies lag daran, weil bisher in keiner Weise über die Konstante b der entwickelten Funktion b^x etwas ausgesagt ist. Um die Abhängigkeit des noch zu bestimmenden Koeffizienten a_1 von der Konstanten b zu finden, ist es am einfachsten

$$a_1x = 1,\ \text{d. h. } x = \frac{1}{a_1}$$

zu setzen. Dadurch erhalten wir:

$$b^{\frac{1}{a_1}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Nun ist aber rechts die Zahl erschienen, die wir im § 9 als Grenzwert von $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ für unbegrenzt wachsende m kennen gelernt haben, und für die der Buchstabe e eingeführt ist. Demgemäß erhalten wir:

$$b^{\frac{1}{a_1}} = e$$

oder, durch Logarithmieren:

$$\frac{1}{a_1} \log b = \log e$$

oder:

$$a_1 = \frac{\log b}{\log e},$$

wobei die Basis, zu welcher $\log b$ und $\log e$ gedacht ist, ganz beliebig ist, nur daß bei $\log b$ und $\log e$ eine und dieselbe Basis hinzuzudenken ist.

Wenn wir nun den soeben für a_1 gefundenen Ausdruck in die oben für b^x gefundene Potenzreihe einsetzen, erhalten wir:

$$1)\ b^x = 1 + \frac{x}{1!}\frac{\log b}{\log e} + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{\log b}{\log e}\right)^2 + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{\log b}{\log e}\right)^3 + \frac{x^4}{4!}\left(\frac{\log b}{\log e}\right)^4 + \cdots$$

Diese Reihe wird besonders einfach, wenn $b = e$ wird, nämlich:

$$2)\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Hieraus ergibt sich für $x = 1$ wiederum die Reihe, welche in § 9 zur Definition von e gedient hat.

Umgekehrt kann man auch die Reihe 1) aus der Reihe 2) ableiten. Wenn man nämlich in 2) $x \cdot \frac{\log b}{\log e}$ für x setzt, so erhält man rechts dieselbe Potenzreihe wie in 1), links aber erhält man:

$$e^{x\frac{\log b}{\log e}}$$

Daß dieser Ausdruck mit b^x identisch ist, erkennt man daraus, daß die Logarithmierung eine Umkehrung der Potenzierung ist. Wenn man nämlich:

$$e^{x\frac{\log b}{\log e}} = z$$

setzt, und beiderseits den Logarithmus für die bei $\log b$ und $\log e$ gedachte Basis nimmt, so erhält man:

$$\frac{x \log b}{\log e} \cdot \log e = \log z$$

oder:

$$x \log b = \log z,$$

woraus durch Übergang zur Potenzierung folgt:

$$b^x = z = e^{\frac{x \log b}{\log e}}.$$

Noch einfacher gestaltet sich der Zusammenhang zwischen den Reihen 1) und 2), wenn man die Zahl e selbst als Basis der in 1) vorkommenden Logarithmen denkt. Dann kommt bei 1):

$$3) \qquad b^x = 1 + \frac{(x \overset{e}{\log} b)}{1!} + \frac{(x \overset{e}{\log} b)^2}{2!} + \frac{(x \overset{e}{\log} b)^3}{3!} + \cdots$$

Diese Potenzreihe entsteht aber auch aus 2), wenn man $x \overset{e}{\log} b$ für x setzt. Um nämlich den Exponenten u zu finden, mit dem e potenziert werden muß, damit b^x entsteht, hat man nur anzusetzen:

$$e^u = b^x$$

und zur Basis e zu logarithmieren. So kommt:

$$u = x \overset{e}{\log} b$$

oder:

$$b^x = e^{x \overset{e}{\log} b}.$$

Weil die Exponentialreihe ebenso wie die im § 13 behandelten logarithmischen Reihen sich besonders einfach gestalten, wenn die Zahl e Basis der Logarithmen wird, so denkt man sich in der höheren Analysis bei den Logarithmen ein Logarithmen-System mit der Basis e zu Grunde gelegt, und nennt dieses Logarithmen-System natürlich, im Gegensatz zu den künstlichen Systemen, unter denen das dekadische wegen unsrer auf der Basis Zehn beruhenden Zifferschrift am meisten gebräuchlich ist. Daß übrigens die Logarithmen eines Systems aus den Logarithmen jedes andern Systems hervorgehen, indem man sie mit einer und derselben, nur von den Basen dieser Systeme abhängigen Zahl multipliziert oder dividiert, ist schon in der „Elementaren Arithmetik" (Bd. I dieser Sammlung, § 32, Formel VI) gezeigt.

Es bleibt noch übrig, den Konvergenz-Bereich der oben gefundenen Exponentialreihe 1) festzustellen. Wir wenden zu diesem Zweck das Cauchysche Kriterium an (Konvergenzsatz IV in § 10). Es ist:

$$u_{n+1} = \frac{x^n}{n!} \left(\frac{\log b}{\log e}\right)^n$$

und: $$u_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\log b}{\log e}\right)^{n-1}$$

also: $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n}\frac{\log b}{\log e}.$$

Dieser Ausdruck wird aber kleiner als 1, sobald n größer wird als $\frac{x \log b}{\log e}$. Von einer bestimmten Stelle an ist also die erste Bedingung des Kriteriums für jedes beliebig gewählte x erfüllt. Aber auch die zweite Bedingung, wonach

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

sein soll, ist erfüllt, weil

$$\lim_{n=\infty} \frac{x}{n}\frac{\log b}{\log e}$$

den Grenzwert Null hat. Die Reihe 1), und dadurch auch die Reihe 2), konvergiert also unbedingt, d. h. für jeden beliebigen positiven Wert von x. Man kann diese Reihen auch benutzen, um b^x oder e^x auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen zu berechnen, indem man nacheinander ihre einzelnen Glieder berechnet, bis diese Glieder so klein werden, daß sie vernachlässigt werden können, weil sie erst auf weitere Dezimalstellen einen Einfluß auszuüben vermögen. Doch wird man finden, daß man um so mehr Glieder braucht, je größer x ist und deshalb die Exponentialreihen zu einer derartigen Berechnung bei einem großen Werte von x schwerlich benutzen kann. Wenn man jedoch x klein wählt, etwa gleich 1 oder kleiner als 1, so genügen wenige Glieder, um b^x oder e^x auch vermittelst der oben entwickelten Exponentialreihen auszurechnen. Für $x = 1$ erhält man aus 2) die schon im § 9 für die Zahl e berechnete Reihe:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2{,}71828182846.$$

Setzt man $x = \frac{1}{10}$, so erhält man aus 2):

$$e^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{e} = 1 + 0{,}1 + 0{,}005 + 0{,}000167 + 0{,}000004 + \ldots$$
$$= 1{,}105171.$$

Doch werden die oben entwickelten Exponentialreihen selten dazu benutzt, um derartige Berechnungen zu machen. Man benutzt sie vielmehr hauptsächlich dazu, um aus der unbedingt konvergenten Reihe für e^x, deren Koeffizienten-Gesetz ja sehr einfach ist, weitere mathematische Erkenntnisse abzuleiten.

Wenn man in der Exponentialreihe 2) x durch $-x$ ersetzt, so erhält man:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Da aus dieser Reihe die für e^x hervorgeht, wenn man statt der abwechselnden Vorzeichen lauter positive setzt, und da die so entstehende Reihe unbedingt konvergent ist, so muß nach Konvergenzsatz III auch die Reihe für e^{-x} konvergent sein. Demnach können wir sagen, daß die Exponentialreihe 2) den Konvergenzbereich:

$$-\infty < x < +\infty \text{ besitzt.}$$

Im § 9 fanden wir die Zahl e als den Grenzwert von

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

für unbegrenzt wachsende n. Wenn wir die dort angestellte Untersuchung für

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

wiederholen, so erhalten wir:

$$1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$+ \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)$$

$$+ \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\left(1 - \frac{4}{n}\right) + \dots$$

Wenn also n unbegrenzt wächst, also die in Klammern stehenden Differenzen sämtlich 1 werden, so ergibt sich:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Die rechts erhaltene Potenzreihe ist aber die oben für e^x gefundene Potenzreihe. Daher ergibt sich als Verallgemeinerung des im § 9 gefundenen Grenzwerts:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Diesen allgemeineren Grenzwert kann man bei der natürlichen Zinseszins-Rechnung benutzen. Schon in der Zinseszins-Rechnung ist erwähnt, daß man, statt sich zu denken, daß die Zinsen alle Jahr zum Kapital geschlagen werden, sich auch denken kann, daß dies alle Monate, d. h. alle Zwölftel-Jahre, oder alle Tage, d. h. bei jedem 365. bezw. 366. Teile des Jahres geschieht. Dadurch wird die Zahl m der Jahre mit 12 oder 365 bezw. 366 multipliziert. Dafür wird aber auch die Prozentzahl p durch eben diese Zahlen dividiert. Es wird also z. B., wenn die Zinsen alle Monat zum Kapital geschlagen werden, aus

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^m \text{ der neue Wert: } a\left(1+\frac{p}{100\cdot 12}\right)^{12m}.$$

Wenn man sich nun weiter denkt, daß die Zinsen in jedem noch so kleinen Teilchen des Jahres zum Kapital geschlagen werden, so muß man hier n statt 12 sagen und dann n unbegrenzt wachsen lassen. Es bekommt dann die Zinseszinsformel die folgende Gestalt:

$$a\left(1+\frac{p:100}{n}\right)^{n\cdot m}.$$

Wenn man demgemäß bei dem obigen Grenzwert $x = p:100$ setzt, erhält man:

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{p:100}{n}\right)^n = e^{p:100}.$$

Potenziert man diese Gleichung mit m, und multipliziert dann mit a, so erhält man:

$$z = a \cdot e^{m\,p:100}$$

als die Formel für die natürlichen Zinseszinsen. Hier

bedeutet a das Anfangskapital, p die pro Jahr gedachte Prozentzahl, m die Zahl der Jahre, z die Zahl der Mark, zu welcher a Mark in m Jahren bei p Prozent anwachsen, wenn die Zinsen nach je $\frac{1}{n}$ des Jahres zum Kapital geschlagen werden, wenn demgemäß 100 Mark Kapital nach je $\frac{1}{n}$ des Jahres $\frac{p}{n}$ Mark Zinsen ergeben, und wenn dann n unbegrenzt wächst. Beispielsweise wenden wir die soeben abgeleitete Formel für die natürlichen Zinseszinsen an, um danach zu berechnen, bei wieviel Prozent sich ein Kapital in vierzehn Jahren verdoppelt. Wir haben zu setzen:

$$z = 2a, \quad m = 14$$

und erhalten: $$2 = e^{14p:100}$$

oder: $$\log 2 = \frac{14p}{100} \cdot \log e$$

oder: $$p = \frac{100 \log 2}{14 \log e} = \frac{30{,}103}{14 \cdot 0{,}434} = \frac{30{,}103}{6{,}076} = 4{,}9.$$

Bei natürlicher Verzinsung verdoppelt sich also ein Kapital in 14 Jahren, wenn 4,9 Prozent pro Jahr gerechnet werden.

Übungen zu § 12.

Entwickele in eine Potenzreihe:

1) $\sqrt{b^x}\ \left[= b^{\frac{x}{2}}\right]$; 2) $\sqrt[3]{b^x}$; 3) $\sqrt[4]{1 : b^x}$; 4) $(b^x)^m$; 5) b^{cx+d}.

Berechne auf drei Dezimalstellen:

6) e^2; 7) $\sqrt{e}$; 8) $\frac{1}{e}$; 9) $\frac{1}{e^2}$; 10) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

11) Berechne mit Benutzung der dekadischen Logarithmentafel a) $\overset{e}{\log} 10$; b) $\log 10$ zur Basis $\sqrt{e}$; c) $\overset{e}{\log} \sqrt{2}$.

Entwickele in eine Potenzreihe:

12) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; 13) $\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{e}\right)^x + \left(\sqrt{e}\right)^{-x}\right]$; 14) $e^{3x} - e^{-3x}$.

Wie heißt für unbegrenzt wachsende n der Grenzwert von:

15) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$? 16) $\left(1+\frac{b}{n}\right)^n$? 17) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$? 18) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$?

19) Ein Wald wird gegenwärtig auf 100000 Kubikmeter geschätzt. Sein jährlicher Zuwachs beträgt $2\frac{1}{2}$ Prozent. Wieviel Kubikmeter hat er nach 10 Jahren, wenn nichts abgeholzt wird? (Natürliche Verzinsung.)

20) Wieviel Prozent beträgt die jährliche Zunahme einer Bevölkerung, die in 20 Jahren von 40000 Einwohnern auf 80000 gestiegen ist, wenn die Formel für die natürliche Verzinsung angewandt wird?

---

§ 13. Die logarithmischen Reihen.

I) $\log(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$ für $x \leqq 1$;

II) $\log(1-x) = -M\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$ für $x < 1$;

III) $\log\frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$ für $x < 1$;

IV) $\log(y+1) - \log y = 2M\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3\cdot(2y+1)^3} + \frac{1}{5\,(2y+1)^5} + \ldots\right]$ für $y > 0$;

V) $2\log z - \log(z+1) - \log(z-1) = 2M\left[\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3\cdot(2z^2-1)^3} + \ldots\right]$ für $z > 1$.

$$M = \log e = 1 : 110 = 0{,}4342945.$$

Da $\log 0 = -\infty$ wird, so gibt es keine Potenzreihe für die Funktion $\log x$. Wir wollen deshalb die Funktion $\log(1+x)$, die ja für $x = 0$ selbst zu Null wird, in eine Potenzreihe entwickeln. Da für $x = 0$ auch $\log(1+x) = 0$

wird, so muß der von x freie erste Koeffizient der gesuchten Potenzreihe Null sein, und wir können daher ansetzen:

1) $$\log(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

also auch:

2) $$\log(1+y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$$

Da nun $\log p + \log q = \log(p \cdot q)$ ist, so erhalten wir:

3) $$\log(1+x) + \log(1+y) = \log[1 + x + y(1+x)].$$

Nun ist, unserem Ansatze gemäß:

4) $$\begin{aligned}&\log[1+x+y(1+x)]\\ &= a_1[x+y(1+x)] + a_2[x+y(1+x)]^2\\ &\qquad + a_3[x+y(1+x)]^3 + \ldots\\ &= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.\\ &+ y[a_1(1+x) + 2a_2 x(1+x) + 3a_3 x^2(1+x)\\ &\qquad + 4a_4 x^3(1+x) + \ldots]\\ &+ y^2[\ldots\ldots] + y^3[\ldots.] + \ldots.\end{aligned}$$

Setzen wir nun in 3) gemäß 1), 2), 4) ein, so hebt sich beiderseits $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}&a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots.\\ &= y[a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + (3a_3 + 4a_4)x^3 + \ldots]\\ &+ y^2[\ldots.] + y^3[\ldots.] + \ldots.\end{aligned}$$

Wenn wir nun nach Vorschrift von § 11 den Koeffizienten von y links und rechts einander gleichsetzen, so erhalten wir:

$$a_1 = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + (3a_3 + 4a_4)x^3 + \ldots$$

Hiernach muß nach § 11 sein:

$$a_1 = a_1;\ 0 = a_1 + 2a_2;\ 0 = 2a_2 + 3a_3;\ 0 = 3a_3 + 4a_4;$$
$$0 = 4a_4 + 5a_5;\ 0 = 5a_5 + 6a_6;\ \text{u. s. w.}$$

Daher ergibt sich:

$$2a_2 = -a_1;\ 3a_3 = -2a_2 = +a_1;\ 4a_4 = -3a_3 = -a_1;$$
$$5a_5 = -4a_4 = +a_1;\ 6a_6 = -5a_5 = -a_1;\ \text{u. s. w.}$$

oder:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_1;\ a_3 = +\frac{1}{3}a_1;\ a_4 = -\frac{1}{4}a_1;\ a_5 = +\frac{1}{5}a_1\ \text{u. s. w.}$$

Demnach sind alle Koeffizienten von a_2 an durch den ersten Koeffizienten a_1 ausgedrückt, und wir erhalten:

$$5) \qquad \log(1+x) = a_1\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\right].$$

Der Koeffizient a_1 konnte sich noch nicht ergeben, da bisher nichts über die dem Logarithmus zu grunde gelegte Basis ausgesagt war. Nehmen wir an, die Basis sei f, so ergibt sich, wie a_1 von f abhängt, aus dem am Schluß von § 9 gefundenen Grenzwert:

$$6) \qquad \lim_{x=0} \frac{1}{x} \overset{f}{\log}(1+x) = \overset{f}{\log} e.$$

Wenn wir demgemäß 5) durch x dividieren, und dann x unendlich klein werden lassen, erhalten wir:

$$7) \qquad \lim_{x=0} \frac{1}{x} \overset{f}{\log}(1+x) = a_1.$$

Durch Vergleich von 6) und 7) erhält man:

$$8) \qquad a_1 = \overset{f}{\log} e.$$

Also erhalten wir schließlich:

$$9) \quad \overset{f}{\log}(1+x) = \overset{f}{\log} e\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right].$$

Den Koeffizienten $\overset{f}{\log} e$ der gefundenen Potenzreihe nennt man den **Modulus** des zu grunde gelegten Logarithmen-Systems. Es gilt also der Satz:

Der Modulus eines Logarithmen-Systems, das eine beliebige Basis hat, ist, bezüglich dieser Basis, gleich dem Logarithmus der in § 9 ausführlich behandelten Zahl e.

Der Modulus des auf der Basis Zehn beruhenden dekadischen Logarithmen-Systems, das fast allein im praktischen Gebrauch ist, wird mit M bezeichnet. Es ist also:

$$M = \overset{10}{\log} e = 0{,}4342945.$$

Die Ausrechnung dieser Zahl geschieht im § 14. Da es für das Rechnen mit Logarithmen ganz gleichgültig ist, welches die zu grunde gelegte Basis ist, so erscheint es am

einfachsten, die Basis so zu wählen, daß $\overset{f}{\log} e$, der Koeffizient der in 9) rechts stehenden Potenzreihe, gleich 1 wird. Dann muß aber $f = e$ sein. Das Logarithmen-System, das die Basis $e = 2{,}7182818$ hat (vgl. § 9), heißt **natürliches**, seine Logarithmen heißen **natürliche Logarithmen** (vgl. § 12). Meint man natürliche Logarithmen, so schreibt man ein bloßes l statt log, also z. B.:

$$l e = 1;\ l(e^2) = 2.$$

In der höheren Mathematik treten natürliche Logarithmen fast allein auf. Nach diesen Festsetzungen wird aus 9):

$$10) \qquad l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Der Modulus M des dekadischen Logarithmen-Systems kann auch als reziproker Wert von $l\,10$ definiert werden. Es ist nämlich, wie schon in der „Elementaren Arithmetik" (§ 32 in Bd. I dieser Sammlung) hervorgehoben ist, allgemein:

$$\overset{b}{\log} p = \frac{\overset{c}{\log} p}{\overset{c}{\log} b}.$$

Denn, setzt man:

$$x = \overset{b}{\log} p,$$

so ist dies gleichbedeutend mit:

$$b^x = p,$$

oder, beiderseits nach der Basis c logarithmiert:

$$x \cdot \overset{c}{\log} b = \overset{c}{\log} p,$$

oder:

$$x = \frac{\overset{c}{\log} p}{\overset{c}{\log} b}.$$

Setzt man nun hier $c = p = e$ und $b = 10$, so erhält man:

$$\overset{10}{\log} e = M = \frac{\overset{e}{\log} e}{\overset{e}{\log} 10} = \frac{1}{l\,10}.$$

Es bleibt übrig, den Konvergenzbereich der in 9) gefundenen Potenzreihe festzustellen. Dieselbe enthält abwechselnde Vorzeichen, und es ist:

$$u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$u_n = \frac{x^n}{n}.$$

Da nun $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $x > n$ größer als $\frac{x^n}{n}$ wird, und nur für $x \leqq 1$ immer kleiner als $\frac{x^n}{n}$ bleibt, und da auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{x^n}{n} = 0 \text{ wird, falls } x \leqq 1 \text{ ist,}$$

so ist die Reihe:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

immer konvergent, falls $x \leqq 1$ ist. Für $x = 1$ erhält man z. B.:

$$l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots.$$

Wenn wir in 9) x in $-x$ verwandeln, erhalten wir:

$$\overset{f}{\log}(1-x) = \overset{f}{\log} e \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \right],$$

oder:

11) $$\overset{f}{\log}(1-x) = -\overset{f}{\log} e \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \right].$$

Daß diese Reihe für $x = 1$ nicht konvergiert, haben wir schon in § 10 eingesehen, wo gezeigt ist, daß:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

größer wird, als jede noch so große Zahl. Dass sie aber für $x < 1$ konvergiert, folgt aus dem Cauchyschen Konvergenz-Kriterium. Denn:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot x^n} = x \cdot \frac{n}{n+1} = x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}};$$

also ist $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, falls $x < 1$ ist, immer < 1 und auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \text{ für } x < 1.$$

Wir können jetzt den Konvergenzbereich der Reihe 11) mit dem der Reihe 9) vereinigen, indem wir sagen, daß die Reihe 9)

$$\overset{f}{\log}(1+x) = \overset{f}{\log} e \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots \right]$$

den Konvergenzbereich:

$$-1 < x \leqq +1$$

hat.

Wenn man mit Hilfe der Reihe in 9) etwa 12 auf nur fünf Dezimalstellen berechnen wollte, würde man eine ungeheuer große Anzahl von Gliedern brauchen, oder, wie man auch sagt, die Reihe in 9) konvergiert sehr langsam. Um schneller konvergierende Reihen zu erhalten, als die Reihen 9), 10) und 11), subtrahieren wir zunächst 11) von 9), wodurch wir, da $\log a - \log b = \log (a:b)$ ist, zunächst erhalten:

$$12) \qquad \overset{f}{\log} \frac{1+x}{1-x} = 2 \overset{f}{\log} e \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots \right].$$

Wenn man in dieser Gleichung x in $-x$ verwandelt, so kommt links und rechts das Negative, so daß es gleichgültig ist, ob wir sagen, die Reihe 12) konvergiert in dem Bereiche $-1 < x < +1$ oder, ob wir sagen, sie konvergiert in dem Bereiche $0 < x < +1$.

Auch die Reihe 12) konvergiert noch zu langsam, um für die praktische Ausrechnung der Mantissen von Logarithmen verwandt zu werden. Eine besser konvergierende Reihe erhalten wir, wenn wir

$$x = \frac{1}{2y+1}$$

setzen. Dann wird:

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{(2y+2):(2y+1)}{(2y):(2y+1)} = \frac{2y+2}{2y} = \frac{y+1}{y};$$

also entsteht aus 12):

$$13) \qquad \overset{f}{\log} \frac{y+1}{y} = 2 \overset{f}{\log} e \left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3 \cdot (2y+1)^3} + \ldots \right].$$

Da für $x=0$ $y=\infty$ wird und für $x=1$ $y=0$ wird, so konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von 13) für jedes positive y.

Aus 13) folgt:

$$14)\quad \overset{f}{\log}(y+1)=\overset{f}{\log} y+2\overset{f}{\log} e\left[\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{3\cdot(2y+1)^3}+\ldots\right].$$

Diese Gleichung zeigt, wie man, wenn man den Logarithmus einer beliebigen positiven Zahl kennt, den Logarithmus der um 1 größeren Zahl finden kann, falls man den Modulus des zu grunde gelegten Logarithmen-Systems kennt. Beispielsweise ist im natürlichen Logarithmen-System, dessen Modulus 1 ist:

$$13=12+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\ldots\right];$$

ferner:

$$19=18+2\left[\frac{1}{17}+\frac{1}{3\cdot 17^3}+\frac{1}{5\cdot 17^5}+\ldots\right];$$

oder:

$$213=312+2\left[\frac{1}{17}+\frac{1}{3\cdot 17^3}+\frac{1}{5\cdot 17^5}+\ldots\right].$$

Aus den beiden soeben für 13 und für 213 gefundenen Reihen folgt durch Elimination von 13:

$$15)\quad 12=4\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\ldots\right]-2\left[\frac{1}{17}+\frac{1}{3\cdot 17^3}+\frac{1}{5\cdot 17^5}+\ldots\right].$$

Mit Hilfe dieser Gleichung 15) kann man 12 bequemer finden, als mit Hilfe der schon oben für 12 gefundenen Reihe, da man, um etwa fünf richtige Dezimalstellen für 12 zu erzielen, weniger Glieder der beiden in 15) vorkommenden Reihen braucht, als die Zahl der Glieder ist, die man braucht, um aus der schon weiter oben gefundenen Reihe 12 auch auf fünf Dezimalstellen zu berechnen.

In § 14 ist ein Weg angegeben, um auf mindestens fünf Dezimalstellen die Logarithmen aller ganzen Zahlen zu finden, indem bei den vorkommenden Reihen immer nur das

allererste Glied berücksichtigt zu werden braucht, weil schon das zweite Glied so klein wird, daß seine Berücksichtigung auf die ersten fünf Dezimalstellen gar keinen Einfluß ausüben kann. Nur sind dort nicht die natürlichen, sondern die dekadischen Logarithmen berechnet, weil die im praktischen Gebrauch befindlichen Tafeln nur die dekadischen Logarithmen enthalten. Wie schon oben gezeigt ist, läßt sich auch der natürliche Logarithmus einer beliebigen Zahl aus dem dekadischen dadurch berechnen, daß man durch

$$\overset{10}{\log} e = M = 0{,}4342945$$

dividiert, oder, was dasselbe ist, mit

$$l\,10 = \frac{1}{M} = 2{,}3025851$$

multipliziert. Bei der in § 14 erörterten Berechnung der Logarithmen muß daher der Modulus M des dekadischen Systems als noch unbekannt betrachtet werden.

Wenn man in 14) $y = z^p - 1$ setzt, so erhält man:

16) $$p \cdot \overset{f}{\log} z = \overset{f}{\log}(z^p - 1) + 2 \overset{f}{\log} e \left[\frac{1}{2z^p - 1} + \frac{1}{3(2z^p-1)^3} + \cdots\right].$$

Beispielsweise verknüpft die Gleichung 15) die Werte zweier dekadischer Logarithmen mit dem Werte des Modulus M. Wir nehmen als Beispiel $f = 10$, $z = 5$, $p = 4$ und erhalten:

$$4 \cdot \log 5 = \log 624 + 2M\left[\frac{1}{1249} + \frac{1}{3 \cdot 1249^3} + \cdots\right],$$

oder:

$$4(\log 10 - \log 2) = (\log 2^4 \cdot 3 \cdot 13) + 2M\left[\frac{1}{1249} + \cdots\right],$$

oder:

$$4 - 4\log 2 = 4\log 2 + \log 3 + \log 13 + 2M\left[\frac{1}{1249} + \cdots\right],$$

oder:

$$\log 13 = 4 - 8\log 2 - \log 3 - 2M\left[\frac{1}{1249} + \frac{1}{3 \cdot 1249^3} + \cdots\right]$$

Aus dieser Gleichung kann man log 13 leicht ausrechnen, wenn log 2, log 3 und M schon berechnet vorliegen.

Wie heißt für unbegrenzt wachsende n der Grenzwert von:

15) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$? 16) $\left(1+\frac{b}{n}\right)^n$? 17) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$? 18) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$?

19) Ein Wald wird gegenwärtig auf 100000 Kubikmeter geschätzt. Sein jährlicher Zuwachs beträgt $2\frac{1}{2}$ Prozent. Wieviel Kubikmeter hat er nach 10 Jahren, wenn nichts abgeholzt wird? (Natürliche Verzinsung.)

20) Wieviel Prozent beträgt die jährliche Zunahme einer Bevölkerung, die in 20 Jahren von 40000 Einwohnern auf 80000 gestiegen ist, wenn die Formel für die natürliche Verzinsung angewandt wird?

---

§ 13. Die logarithmischen Reihen.

I) $\log(1+x) = M\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)$ für $x \leqq 1$;

II) $\log(1-x) = -M\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots\right)$ für $x<1$;

III) $\log\frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$ für $x<1$;

IV) $\log(y+1)-\log y = 2M\left[\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{3\cdot(2y+1)^3}+\frac{1}{5\,(2y+1)^5}+\ldots\right]$ für $y>0$;

V) $2\log z-\log(z+1)-\log(z-1) = 2M\left[\frac{1}{2z^2-1}+\frac{1}{3\cdot(2z^2-1)^3}+\ldots\right]$ für $z>1$.

$$M = \log e = 1:1\,10 = 0{,}4342945.$$

Da $\log 0 = -\infty$ wird, so gibt es keine Potenzreihe für die Funktion $\log x$. Wir wollen deshalb die Funktion $\log(1+x)$, die ja für $x=0$ selbst zu Null wird, in eine Potenzreihe entwickeln. Da für $x=0$ auch $\log(1+x)=0$

wird, so muß der von x freie erste Koeffizient der gesuchten Potenzreihe Null sein, und wir können daher ansetzen:

1) $$\log(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

also auch:

2) $$\log(1+y) = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots$$

Da nun $\log p + \log q = \log(p \cdot q)$ ist, so erhalten wir:

3) $$\log(1+x) + \log(1+y) = \log[1 + x + y(1+x)].$$

Nun ist, unserem Ansatze gemäß:

4) $$\begin{aligned}&\log[1+x+y(1+x)]\\ &= a_1[x+y(1+x)] + a_2[x+y(1+x)]^2\\ &\qquad + a_3[x+y(1+x)]^3 + \ldots\\ &= a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.\\ &+ y[a_1(1+x) + 2a_2 x(1+x) + 3a_3 x^2(1+x)\\ &\qquad + 4a_4 x^3(1+x) + \ldots]\\ &+ y^2[\ldots\ldots] + y^3[\ldots.] + \ldots.\end{aligned}$$

Setzen wir nun in 3) gemäß 1), 2), 4) ein, so hebt sich beiderseits $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}&a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots.\\ &= y[a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + (3a_3 + 4a_4)x^3 + \ldots]\\ &+ y^2[\ldots.] + y^3[\ldots.] + \ldots.\end{aligned}$$

Wenn wir nun nach Vorschrift von § 11 den Koeffizienten von y links und rechts einander gleichsetzen, so erhalten wir:

$$a_1 = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + (3a_3 + 4a_4)x^3 + \ldots$$

Hiernach muß nach § 11 sein:

$$a_1 = a_1;\ 0 = a_1 + 2a_2;\ 0 = 2a_2 + 3a_3;\ 0 = 3a_3 + 4a_4;$$
$$0 = 4a_4 + 5a_5;\ 0 = 5a_5 + 6a_6;\ \text{u. s. w.}$$

Daher ergibt sich:

$$2a_2 = -a_1;\ 3a_3 = -2a_2 = +a_1;\ 4a_4 = -3a_3 = -a_1;$$
$$5a_5 = -4a_4 = +a_1;\ 6a_6 = -5a_5 = -a_1;\ \text{u. s. w.}$$

oder:

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_1;\ a_3 = +\frac{1}{3}a_1;\ a_4 = -\frac{1}{4}a_1;\ a_5 = +\frac{1}{5}a_1\ \text{u. s. w.}$$

vierziffrigen Zahl subtrahiert, und die erhaltene Differenz mit $\frac{d}{10}$ multipliziert, wo d eine der einziffrigen Zahlen von 1 bis 9 ist.

Übungen zu § 13.

1) Beweise den Satz: Die Moduli zweier Logarithmen-Systeme verhalten sich umgekehrt wie die bezüglich irgend einer Basis berechneten Logarithmen der den Systemen zu grunde gelegten Basen.

Bestimme mit Benutzung der dekadischen Logarithmentafel die Moduli der Systeme, welche zu den folgenden Basen gehören ($e = 2{,}71828$):

2) 10; 3) $\sqrt{10}$; 4) e^2; 5) $\frac{1}{e}$; 6) 12; 7) 2; 8) $3\frac{1}{3}$.

Bestimme durch die Reihe 9), mit welcher Reihe $M = \log^{10} e = 0{,}43429$ zu multiplizieren ist, um den dekadischen Logarithmus jeder der folgenden Zahlen zu ergeben:

9) $\log 11$; 10) $\log 101$; 11) $\log \frac{5}{4}$; 12) $\log \frac{11}{9}$.

13) Beweise durch Formel 10, daß $l\,11 - l\,10$ zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{19}{200}$ liegen muß.

14) Wie heißt die Reihe, mit welcher $-M = -0{,}43429$ zu multiplizieren ist, um den dekadischen Logarithmus von $\log \frac{9}{10}$ zu ergeben.

15) Drücke mit Benutzung der im Text mit 14) bezeichneten Gleichung $\log 3 \left(= \frac{1}{2} \log 9\right)$ aus.

16) Beweise:

$$l\,3 = 6\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \ldots\right] - 2\left[\frac{1}{17} + \frac{1}{3 \cdot 17^3} + \ldots\right].$$

17) Berechne $l\,3$ durch Nr. 16) auf drei Dezimalstellen.

18) Man benutze die Gleichung 14) des Textes, um

drei Gleichungen zwischen $\log 2$, $\log 3$ und M aufzustellen, indem man $y = 15$, $= 24$, $= 80$ setzt.

19) Benutze 18), um $\log 2$, $\log 3$ und M auf drei Stellen zu berechnen.

20) Setze in Nr. 16 des Textes $z = 3$, $p = 5$, $f = 10$.

21) Benutze die in 20) gefundene Gleichung, um $\log 11$ durch $\log 2$, $\log 3$ und M auszudrücken.

22) Man benutze Nr. 17) des Textes, um $\log 41$ durch $\log 2$, $\log 3$ und M auszudrücken, indem man $z = 81$ setzt.

23) Wenn d und g gegenüber z klein sind, so verhält sich $\log\left(z + \frac{d}{10}\right) - \log z$ zu $\log\left(z + \frac{g}{10}\right) - \log z$ wie d zu g. Beweise dies.

24) Die Unterschiede zweier Paare von Logarithmen verhalten sich wie die Unterschiede der zugehörigen Zahlen selbst, falls die Unterschiede gegenüber den Zahlen klein sind. Beweise dies.

---

§ 14. Die Berechnung der dekadischen Logarithmen.*)

Was die Berechnung der dekadischen Logarithmen anbetrifft, so geht schon aus § 32 des I. Bandes dieser Sammlung hervor, daß die Logarithmen von zwei Zahlen, bei denen das Verhältnis eine Potenz von Zehn ist, deren Exponent ganzzahlig ist, sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden können, so daß die Bekanntschaft mit den Mantissen aller vierziffrigen Zahlen ausreicht, um nicht allein die Logarithmen aller höchstens vierziffrigen Zahlen finden zu können, sondern auch erstens, um die Logarithmen aller Zahlen oder Dezimalbrüche kennen zu lernen, welche aus vierziffrigen Zahlen durch Multiplikation oder Division mit einer Potenz

*) Die vom Verfasser herausgegebenen fünfstelligen Tafeln (Teubner, 1897) und vierstelligen Tafeln (Leipzig, Göschen, 1898) unterscheiden sich von den meisten der sonst gebräuchlichen Logarithmentafeln, indem in ihnen auch die Antilogarithmen tabellarisch zusammengestellt sind, also die Aufsuchung des Numerus zu einem gegebenen Logarithmus in derselben Weise geschehen kann, wie die Aufsuchung des Logarithmus zu einer gegebenen Zahl.

von Zehn hervorgehen können, zweitens auch, um für den Logarithmus einer Zahl oder eines Dezimalbruches, der auf diese Weise aus einer Zahl mit mehr als vier Ziffern hervorgeht, eine obere und eine untere Grenze zu finden. Um auch den Einfluß einer fünften und sechsten von Null verschiedenen Ziffer auf die letzten Dezimalstellen der gefundenen Mantisse berechnen zu können, dient das Verfahren der Interpolation, das schon am Schluß von § 13 erörtert ist. Die meisten der gegenwärtig gebräuchlichen Logarithmentafeln (vgl. § 32 von Band I) enthalten deshalb eine geordnete Zusammenstellung der Mantissen aller vierziffrigen Zahlen,*) und zwar sind diese Mantissen auf fünf Dezimalstellen angegeben, was vollkommen ausreicht, um durch Interpolation die fünfstelligen Mantissen auch aller solcher Zahlen zu gewinnen, die entweder fünfziffrig sind oder aus fünfziffrigen Zahlen durch Multiplikation oder Division mit einer Potenz von Zehn hervorgehen können. Es ist jedoch durchaus nicht nötig, den Logarithmus jeder einzelnen vierziffrigen Zahl mit Hilfe der in § 13 angegebenen Reihen zu berechnen. Da jede zusammengesetzte Zahl ein Produkt von Potenzen von Primzahlen ist, und

$$\log(2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}\cdot 7^{\delta}\ldots) = \alpha\cdot\log 2+\beta\cdot\log 3 + \gamma\cdot\log 5+\delta\cdot\log 7+\ldots$$

ist, so erscheint der Logarithmus jeder zusammengesetzten Zahl als Summe von Vielfachen der Logarithmen kleinerer Primzahlen, so daß die in § 13 entwickelten Reihen nur angewandt zu werden brauchen, um die Logarithmen der Primzahlen zu gewinnen. Aber auch diese brauchen nicht sämtlich direkt berechnet zu werden, da man die Logarithmen größerer Primzahlen aus den Logarithmen von zusammengesetzten Zahlen gewinnen kann. Wenn beispielsweise log 683 berechnet werden soll, so beachte man, daß $3\cdot 683 = 2049$ zwischen $2048 = 2^{11}$ und $2050 = 50\cdot 41$ liegt.

Also setze man an:

$$\log 2048 = 11\cdot\log 2 = 3{,}31133$$

und andrerseits:

$$\log 2050 = \log 2 + 2\log 5 + \log 41 = 3{,}31175.$$

Dann ist:

$$\log 2049 = \log 3 + \log 683 = 3{,}31133 + \frac{3{,}31175 - 3{,}31133}{2}$$
$$= 3{,}31154.$$

Demnach ist:

$$\log 683 = 3{,}31154 - 0{,}47712 = 2{,}83442.$$

Es reicht vollkommen aus, wenn man durch Reihenentwickelung die Logarithmen nur von den kleinen Primzahlen, etwa derer, die kleiner als hundert sind, berechnet. Dann kann man auf leichte Weise die Logarithmen aller zusammengesetzten Zahlen finden, die höchstens vierziffrig sind, und aus ihnen dann die Logarithmen aller drei- und vierziffrigen Primzahlen durch Interpolation gewinnen. Für die Berechnung durch Reihen erweist sich die in § 13 entwickelte Formel:

1) $$2\log u = \log(u-1) + \log(u+1)$$
$$+ 2M\left[\frac{1}{2u^2-1} + \frac{1}{3\cdot(2u^2-1)^3} + \frac{1}{5\cdot(2u^2-1)^5} + \ldots\right]$$

als besonders brauchbar, weil es sich durch diese so einrichten läßt, daß man von der in der eckigen Klammer stehenden Reihen-Entwickelung immer nur das erste Glied braucht. Wenn nämlich $2u^2-1$ eine vierziffrige Zahl ist, so ist:

$$2u^2 - 1 > 10^3,$$

also:

$$3\cdot(2u^2-1)^3 > 3\cdot 10^9,$$

daher:

$$\frac{1}{3\cdot(2u^2-1)^3} < \frac{1}{3\cdot 10^9},$$

d. h. schon das zweite Glied der Reihe wird so klein, daß dasselbe immer vernachlässigt werden kann, selbst wenn man acht Dezimalstellen der gesuchten Mantisse haben will. Um aber zu erreichen, daß $2u^2-1$ eine vierziffrige Zahl werde, braucht ja u nur größer als 22 zu sein. Wenn also M, der Modulus des dekadischen Logarithmen-Systems, sowie die Logarithmen der Primzahlen, die <22 sind, berechnet vorliegen, kann man die Logarithmen der größeren Primzahlen ohne weiteres aus der obigen Formel entnehmen, z. B.:

$$2\log 23 = (\log 2 + \log 11) + (3\log 2 + \log 3) + 2\,M \cdot \frac{1}{1057};$$

$$2\log 29 = (2\log 2 + \log 7) + (1 + \log 3) + 2\,M \cdot \frac{1}{1681};$$

u. s. w.

Es handelt sich also nur noch um die Berechnung des Modulus M und der Logarithmen der 7 Primzahlen:

2, 3, 7, 11, 13, 17, 19,

wo 5 fortgelassen werden konnte, weil

$$\log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

ist. Auch hierfür kann die obige Formel so angewandt werden, daß man lediglich das allererste Glied der Reihe zu berechnen braucht, weil die Formel die Logarithmen von drei aufeinanderfolgenden Zahlen miteinander verbindet, nämlich:

$$\log(u-1),\ \log u,\ \log(u+1)$$

und man immer drei aufeinanderfolgende Zahlen finden kann, welche bei Festhaltung der Reihenfolge von den kleineren zu den größeren Zahlen, außer den Primfaktoren 2 und 3 nur noch eine einzige, noch nicht berücksichtigte Primzahl als Faktor enthalten. Man wird nämlich etwa finden:

	log 7	aus dem	Tripel	48, 49, 50;
dann:	„ 11	„	„	„	98, 99, 100;
dann:	„ 13	„	„	„	63, 64, 65;
dann:	„ 17	„	„	„	34, 35, 36;
dann:	„ 19	„	„	„	75, 76, 77;
dann:	„ 23	„	„	„	68, 69, 70

u. s. w.

Die Anwendung der obigen Formel auf diese Tripel ergibt der Reihe nach:

$$4\log 7 = (4\log 2 + \log 3) + (2 - \log 2) + \frac{2\,M}{4801};$$

$$2\log 11 + 4\log 3 = (2\log 7 + \log 2) + 2 + \frac{2\,M}{19601};$$

$$12\log 2 = (2\log 3 + \log 7) + (1 - \log 2 + \log 13) + \frac{2\,M}{8191};$$

$$2\log 7 + 2 - 2\log 2 = (\log 2 + \log 17) + (2\log 2 + 2\log 3) + \frac{2M}{2449};$$

$$2\log 19 + 4\log 2 = (\log 3 + 2 - 2\log 2) + (\log 7 + \log 11) + \frac{2M}{11551};$$

$$2\log 23 + 2\log 3 = (2\log 2 + \log 17) + (1 + \log 7) + \frac{2M}{9521}.$$

Hiermit ist das Problem der Berechnung der Logarithmen aller fünfziffrigen Zahlen und dadurch auch aller Zahlen unter 100 000 auf das Problem reduziert,

den Modulus M sowie $\log 2$ und $\log 3$

zu berechnen. Für diese drei Unbekannten stellen wir deshalb drei voneinander unabhängige Gleichungen auf, und zwar dergestalt, daß es wieder hinreicht, wenn von den vorkommenden Reihen nur das erste Glied genommen zu werden braucht, weil dasselbe der reziproke Wert einer vierziffrigen Zahl z ist, und deshalb schon das zweite Glied

$$\frac{1}{3 \cdot z^3}$$

vernachlässigt werden darf, selbst wenn man acht richtige Dezimalstellen haben will. Der Kürze wegen setzen wir:

$$(z) \text{ für } 2M\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{3 \cdot z^3} + \cdots\right],$$

so daß, wenn z eine vierziffrige Zahl ist und nicht mehr als acht Dezimalstellen berechnet werden sollen,

$$(z) \text{ mit } \frac{2M}{z}$$

identifiziert werden darf.

Um die erste der gesuchten drei Gleichungen zu erhalten, leiten wir durch die Formeln des § 13 zwei Gleichungen ab, welche M, $\log 2$, $\log 3$ und $\log 41$ miteinander verbinden. Es ist nämlich:

$$1024 = 2^{10} \text{ und } 1025 = 5^2 \cdot 41 = 10^2 \cdot 41 : 2^2$$

und deshalb wegen der in § 13 mit Nr. 14) bezeichneten Reihe:

2) $$\log 41 + 2 - 2\log 2 - 10\log 2 = (2049).$$

Ferner erhält man, da $80 = 2^3 \cdot 10$, $81 = 3^4$, $82 = 2 \cdot 41$ ist, durch unsere Formel 1):

3) $$8\log 3 - (3\log 2 + 1) - (\log 2 + \log 41) = (13121).$$

Aus 2) und 3) folgt durch Elimination von $\log 41$ die erste der gesuchten drei Gleichungen, nämlich:

I) $$8\log 3 - 16\log 2 + 1 = (2049) + (13121).$$

Zugleich erhalten wir:

4) $$\log 41 = 8\log 3 - 4\log 2 - 1 - (13121).$$

Um die zweite der drei Gleichungen zu erhalten, beachten wir zuerst, daß $24 = 2^3 \cdot 3$, $25 = 10^2 : 2^2$, $26 = 2 \cdot 13$ ist, und erhalten aus Formel 1):

5) $$4 - 4\log 2 - (3\log 2 + \log 3) - (\log 2 + \log 13) = (1249).$$

Ebenso erhalten wir aus dem Tripel 25, 26, 27:

6) $$2\log 13 + 2\log 2 - (2 - 2\log 2) - 3\log 3 = (1351).$$

Aus 5) und 6) folgt nun durch Elimination von $\log 13$ die gesuchte zweite Gleichung:

II) $$6 - 12\log 2 - 5\log 3 = (1351) + 2 \cdot (1249).$$

Ferner erhalten wir nebenbei:

7) $$\log 13 = 4 - 8\log 2 - \log 3 - (1249).$$

Um die dritte der drei Gleichungen zu erhalten, wenden wir zuerst Formel 1) auf das Tripel 48, 49, 50 an, wodurch wir erhalten:

8) $$4\log 7 - (4\log 2 + \log 3) - (2 - \log 2) = (4801).$$

Ebenso erhalten wir für das Tripel 63, 64, 65:

9) $$12\log 2 - (2\log 3 + \log 7) - (1 - \log 2 + \log 13) = (8191).$$

Wenn man aus 8) und 9) $\log 7$ eliminiert, und den in 7) erhaltenen Ausdruck für $\log 13$ substituiert, erhält man die dritte der gesuchten drei Gleichungen, nämlich:

III) $81\log 2 - 5\log 3 - 22 = (4801) + 4\cdot(8191) - 4\cdot(1249).$

Die gewonnenen drei Gleichungen, nämlich:

I) $8\log 3 - 16\log 2 + 1 = (2049) + (13121);$

II) $-5\log 3 - 12\log 2 + 6 = (1351) + 2\cdot(1249);$

III) $+5\log 3 - 81\log 2 + 22 = 4\cdot(1249) - (4801) - 4\cdot(8191)$

bestehen zwischen den drei Unbekannten $\log 2$, $\log 3$ und dem Modulus M. Eliminiert man zunächst $\log 3$, so erhält man:

$$10)\quad \begin{cases} -93\cdot\log 2 + 28 = 6\cdot(1249) + (1351) - (4801) - 4(8191) \\ -176\cdot\log 2 + 53 = 16\cdot(1249) + 8\cdot(1351) + 5\cdot(2049) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 5\cdot(13121) \end{cases}$$

als ein System von zwei Gleichungen zwischen $\log 2$ und M. Die in Klammern gesetzten Zahlen bedeuten aber nach dem Obigen die Produkte von 2 M mit Potenzreihen von der Form:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{3\cdot a^3} + \frac{1}{5\cdot a^5} + \cdots,$$

wo a die in Klammer gesetzte Zahl ist. Wie schon oben erörtert ist, kann jede solche Reihe durch ihr erstes Glied ersetzt werden, falls man sich auf eine Genauigkeit von sieben bis acht Dezimalstellen beschränkt. Durch Division der beiden Gleichungen in 10) eliminiert man 2 M und erhält $\log 2$ als einen Bruch, in dessen Zähler und in dessen Nenner je eine Summe von sechs Brüchen steht, nämlich:

$$11)\quad \log 2 = \frac{\frac{130}{1249} + \frac{171}{1351} + \frac{140}{2049} + \frac{53}{4801} + \frac{212}{8191} + \frac{140}{13121}}{\frac{432}{1249} + \frac{568}{1351} + \frac{465}{2049} + \frac{176}{4801} + \frac{704}{8191} + \frac{465}{13121}}.$$

Die Berechnung in Dezimalbruchform gestaltet sich nun folgendermaßen:

$\frac{130}{1249} = 0{,}10408327$	$\frac{432}{1249} = 0{,}34587670$
$\frac{171}{1351} = 0{,}12657291$	$\frac{568}{1351} = 0{,}42042931$
$\frac{140}{2049} = 0{,}06832601$	$\frac{465}{2049} = 0{,}22693997$

$$\frac{53}{4801} = 0{,}011\,039\,37 \qquad \frac{176}{4801} = 0{,}036\,659\,03$$
$$\frac{212}{8191} = 0{,}025\,882\,07 \qquad \frac{704}{8191} = 0{,}085\,947\,99$$
$$\frac{140}{13121} = 0{,}010\,669\,92 \qquad \frac{465}{13121} = 0{,}035\,439\,36,$$

wo die achte Dezimalstelle unterstrichen ist, wenn bei ihr eine Erhöhung stattgefunden hat. Durch Addition der sechs Brüche des Zählers und der sechs Brüche des Nenners erhält man:

$$\log 2 = \frac{0{,}346\,573\,55}{1{,}151\,292\,36} = 0{,}301\,0300,$$

welcher Dezimalbruch sicherlich auf sieben Dezimalstellen genau ist. Hiernach findet man nun aus 10):

$$M = 0{,}434\,29,$$

und dann aus I, II oder III:

$$\log 3 = 0{,}477\,1213.$$

Hiernach ist es nun, nach den obigen Erörterungen, sehr leicht, zunächst die Logarithmen aller zweiziffrigen Primzahlen zu berechnen, darauf die aller drei- und vierziffrigen zusammengesetzten Zahlen, und endlich durch Interpolation auch die aller größeren Primzahlen.

Übungen zu § 14.

Jemand kennt die Logarithmen von 2, 3 und 5. Wie kann er die Logarithmen der folgenden Zahlen berechnen:

1) 108? 2) 250? 3) 784? 4) 720? 5) 729? 6) 3072?

Wende die Formel 1) des Textes an, um die Logarithmen der folgenden Primzahlen durch die Logarithmen der beiden ihnen benachbarten ganzen Zahlen auszudrücken:

7) 29; 8) 37; 9) 43; 10) 89; 11) 101; 12) 239; 13) 65337.

14) Beweise, daß für jedes zweiziffrige u das zweite Glied der in Formel 1) des Textes stehenden Reihe schon kleiner als der 120 000. Teil von 1 wird.

Wenn der Modulus M auf fünf und die Logarithmen der Zahlen 2, 3 und 7 auf sieben Stellen berechnet vorliegen, so können die Logarithmen der größeren Primzahlen aus Tripeln aufeinanderfolgender Zahlen auf mindestens sechs Stellen berechnet werden. Gib solche Tripel an, falls berechnet werden soll:

15) log 11; 16) log 13; 17) log 17; 18) log 19; 19) log 31.

20) Stelle ein System von drei Gleichungen mit den drei Unbekannten log 2, log 3 und M zusammen, das in ähnlicher Weise, wie das im Texte, gebildet ist, jedoch von diesem verschieden ist, und zwar derartig, daß wieder das erste Glied der Reihe 1) des Textes ausreicht, um jede der drei Unbekannten auf mindestens 5 Stellen zu ergeben.

---

§ 15. Der binomische Lehrsatz für beliebige reelle Exponenten.

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 + \ldots \text{ ad inf., (falls } x < 1),$$

auch wenn m keine positive ganze Zahl, sondern eine positive oder negative, rationale oder irrationale Zahl ist.

Im ersten Teil dieser „Niederen Analysis“ (§ 5) ist die m-te Potenz einer zweigliedrigen Summe für den Fall, daß m eine positive ganze Zahl ist, in eine Summe von $m+1$ Addenden verwandelt. Hier soll die Entwickelung der m-ten Potenz einer zweigliedrigen Summe dahin verallgemeinert werden, daß m eine ganz beliebige reelle Zahl ist. Es ergibt sich dann aber eine Summe von unzählig vielen Gliedern, die eine Potenzreihe darstellt, wenn die zweigliedrige Summe $1+x$ ist. Aus der Entwickelung von $(1+x)^m$ kann man

aber auch die von $(a+b)^m$ erschließen, dadurch, daß man $x=\frac{b}{a}$ setzt, und dann die Gleichung beiderseits mit a^m multipliziert.

Um $(1+x)^m$, wo m beliebig ist, in eine Potenzreihe zu entwickeln, benutzen wir die im § 11 besprochene Methode der zu bestimmenden Koeffizienten. Zu diesem Zweck setzen wir an:

$$(1+x)^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Zunächst setzen wir $x=0$, woraus wir erhalten, daß

$$1 = a_0$$

ist. Es ergibt sich dann durch Transponieren und Division durch x:

$$\frac{(1+x)^m - 1}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$$

Wenn wir nun x sich der Null nähern lassen, erhalten wir rechts a_1 als Grenzwert, links aber den im § 4 unter Nr. 2 behandelten Grenzwert, der dort für den allgemeinen Fall abgeleitet ist, daß m eine ganz beliebige reelle Zahl ist. Da der Grenzwert gleich m ist, so dürfen wir den Koeffizienten a_1 durch m ersetzen. Hiernach lautet unser Ansatz jetzt:

$$(1+x)^m = 1 + mx + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

Wir benutzen jetzt die Potenzregel, wonach $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ ist, indem wir zweitens ansetzen:

$$(1+y)^m = 1 + my + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \dots,$$

die beiden Gleichungen miteinander multiplizieren und links die Potenzreihe für

$$[(1+x)(1+y)]^m = [1+x+y(1+x)]^m$$

ansetzen. So kommt:

$$1 + m[x+y(1+x)] + a_2[x+y(1+x)]^2 + a_3[x+y(1+x)]^3 + \dots$$
$$= (1 + mx + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots)(1 + my + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots)$$

Auf die einzelnen Glieder der linken Seite wenden wir nun den schon im ersten Teile der „Niederen Analysis“ (§ 5) für positiv-ganzzahlige Exponenten bewiesenen binomischen Lehrsatz an und ordnen rechts und links nach steigenden Potenzen von y. Dadurch erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&[1 + mx + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots] \\
&+ y[m(1+x) + a_2 \cdot 2x(1+x) + a_3 \cdot 3x^2(1+x) + a_4 \cdot 4x^3(1+x) + \ldots] \\
&+ y^2[\ldots\ldots] \\
&= [1 + mx + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots] \\
&+ y[m + m^2x + ma_2x^2 + ma_3x^3 + ma_4x^4 + \ldots] \\
&+ y^2[\ldots\ldots]
\end{aligned}
$$

In diesen beiden nach aufsteigenden Potenzen von y fortschreitenden Potenzreihen dürfen wir jetzt die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von y einander gleich setzen. Jeder dieser Koeffizienten wird aber selbst zu einer nach steigenden Potenzen von x fortschreitenden Potenzreihe. Die von y freien Koeffizienten sind identisch, nicht aber die links und rechts erscheinenden Koeffizienten der ersten Potenz von y. Setzen wir diese beiden Koeffizienten einander gleich, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&m(1+x) + a_2 \cdot 2x(1+x) + a_3 \cdot 3x^2(1+x) + a_4 \cdot 4x^3(1+x) + \ldots \\
&= m + m^2x + ma_2x^2 + ma_3x^3 + ma_4x^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

oder, wenn wir links die Klammern auflösen und dann nach steigenden Potenzen von x ordnen:

$$
\begin{aligned}
&m + (m + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + (3a_3 + 4a_4)x^3 \\
&\qquad + (4a_4 + 5a_5)x^4 + \ldots \\
&= m + m^2x + ma_2x^2 + ma_3x^3 + ma_4x^4 + \ldots
\end{aligned}
$$

Durch Gleichsetzung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x erhält man nun die folgende Kette von Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
m &= m \\
m + 2a_2 &= m^2 \\
2a_2 + 3a_3 &= ma_2 \\
3a_3 + 4a_4 &= ma_3 \\
4a_4 + 5a_5 &= ma_4 \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Aus dieser Gleichungskette aber folgt nacheinander:

$$2a_2 = m(m-1) \text{ oder } a_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2};$$

$$3a_3 = a_2(m-2) = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}$$

$$\text{oder } a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3};$$

$$4a_4 = a_3(m-3) = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\text{oder } a_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Dann folgen die Resultate:

$$a_5 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5};$$

$$a_6 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-4)(m-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

u. s. w.

Hiermit wäre die in der Überschrift genannte Gleichung bewiesen, freilich nur für solche Werte von x, bei denen die Potenzreihe, die die rechte Seite bildet, sich als konvergent erweist. Da bei beliebig gedachtem m die Auffindung des Konvergenz-Bereichs die Unterscheidung verschiedener Fälle nötig macht und deshalb kompliziert wird, so ziehen wir es vor, die Konvergenz in jedem einzelnen Falle nachzuweisen, der sich ergibt, wenn wir für m spezielle Zahlen einsetzen.

1) Für $m = -2$ und negative x ergibt sich:

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + \frac{(-2)(-3)}{1\cdot 2}\cdot x^2 - \frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3 + \ldots$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 - \ldots$$

Diese im § 11 schon als Beispiel behandelte Reihe ist dort als für $x < 1$ konvergent bewiesen. Ebenso ist konvergent die Reihe, die aus ihr entsteht, wenn x in $-x$ verwandelt wird.

2) Für $m = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right) + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)+\cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 2^2} + \frac{x^3\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3} - \frac{x^4\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4} + \frac{x^5\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5} - \cdots$$

Wenn wir hier nun noch in den Nennern $1\cdot 2\cdot 2^2$ in $2\cdot 4$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^3$ in $2\cdot 4\cdot 6$ u. s. w. verwandeln, so erhalten wir die gefundene Potenzreihe in solcher Gestalt, daß das Gesetz, nach welchem die Koeffizienten zu bilden sind, leicht erkennbar ist, nämlich:

$$\sqrt{1+x} = 1 + x\cdot\frac{1}{2} - x^2\cdot\frac{1}{2\cdot 4} + x^3\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - x^4\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots$$

Diese Reihe ist für $x < 1$ konvergent, da sie vom zweiten Gliede an abwechselnde Vorzeichen hat, und

$$u_n = x^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots(2n)}$$

$$= x^n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdots\frac{2-\frac{3}{n}}{2}$$

für unbegrenzt wachsende n, falls $x < 1$ ist, den Grenzwert Null hat.

Man kann die soeben abgeleitete Reihe für $\sqrt{1+x}$ auch benutzen, um Quadratwurzeln aus Zahlen, die größer als 1 sind, bequem numerisch zu berechnen, bequem deshalb, weil man nur wenige Glieder der Reihe zu berücksichtigen braucht, um doch schon fünf oder mehr richtige Dezimalstellen zu erhalten. Dies zeigt das folgende Beispiel:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{50}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{7^2+1} = \frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$$
$$= \frac{7}{5}\left[1 + \frac{1}{98} - \frac{1}{19208} + \cdots\right]$$
$$= \frac{7}{5}[1 + 0{,}010200 - 0{,}000052]$$
$$= \frac{7}{5} \cdot 1{,}010148 = 1{,}41421.$$

3) Für $m = \frac{1}{3}$ ergibt sich:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right) + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)$$
$$+ \frac{x^4}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{x^2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3^2} + \frac{x^3 \cdot 2 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^3} - \frac{x^4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^4} + \cdots$$
$$= 1 + x \cdot \frac{1}{3} - x^2 \cdot \frac{2}{3 \cdot 6} + x^3 \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} - x^4 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \cdots$$

Wie in 2) läßt sich wieder leicht zeigen, daß die soeben entwickelte Reihe für $x < 1$ konvergent ist. Als Beispiel wählen wir:

$$\sqrt[3]{0{,}2} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} = \sqrt[3]{\frac{343}{1715}} = \frac{7}{12}\sqrt[3]{\frac{1728}{1715}} = \frac{7}{12}\sqrt[3]{1+\frac{13}{1715}}$$
$$= \frac{7}{12}\left[1 + \frac{13}{5145} - \frac{338}{26471025} + \cdots\right].$$

4) Für $m = -\frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}x^3 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots$$

Die Konvergenz für $x < 1$ läßt sich wieder, ähnlich wie in 2), nachweisen. Z. B.:

$$\sqrt{30} = 6\sqrt{\frac{5}{6}} = 6 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 6\left(1+\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} = 6\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{2^2}{10^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2^3}{10^3} + \ldots\right]$$

$$= 6\left[1 - \frac{1}{10} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{100} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{1000} + \frac{35}{8}\cdot\frac{1}{10000}\cdots\right]$$

5) Wenn $m = -\frac{1}{2}$ ist, aber zugleich x in $-x$ verwandelt wird, so ergibt sich:

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 5}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots,$$

eine Reihe mit lauter positiven Gliedern, deren Konvergenz für $x < 1$ nach dem Cauchyschen Kriterium (§ 10) leicht nachweisbar ist. Z. B.:

$$\sqrt{10} = 3\sqrt{\frac{10}{9}} = 3\left(\frac{9}{10}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3\left(1-\frac{1}{10}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{100} + \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{1000} + \frac{35}{128}\cdot\frac{1}{10000} + \ldots\right]$$

$$= 3\,[1 + 0{,}050 + 0{,}004] = 3 \cdot 1{,}054 = 3{,}162.$$

6) Wenn $m = \sqrt{2}$ ist, so ergibt sich:

$$(1+x)^{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}\cdot x + \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)\,(\sqrt{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + x\cdot\sqrt{2} + \frac{x^2}{1\cdot 2}(2-\sqrt{2}) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}(4\sqrt{2}-6) + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(26 - 18\sqrt{2}) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2}\cdot 2 - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6 + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 26 - \ldots$$

$$+ \sqrt{2}\left[x - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{4x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{18x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\right].$$

Übungen zu § 15.

Entwickele nach Potenzen von x:

1) $\sqrt[3]{(1+x)^2}$; 2) $\sqrt[4]{1-x}$; 3) $(1+2x)^{\frac{1}{5}}$; 4) $(1+x)^{-2}$;

5) $(1-x)^{\frac{3}{4}}$; 6) $(1+x)^{-\frac{4}{5}}$; 7) $(1-3x)^{\frac{3}{2}}$;

8) $\sqrt{2+x}\left[=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{x}{2}}\right]$.

9) Es ist $d<a$. Entwickele hiernach $\sqrt{a+d}$ in das Produkt von $\sqrt{a}$ mit einer Potenzreihe.

Berechne durch Binomialreihen auf 5 Dezimalstellen:

10) $\sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$; 11) $\sqrt{2}=\frac{17}{12}\sqrt{1-\frac{1}{289}}$;

12) $\sqrt{3}=\frac{26}{15}\sqrt{1-\frac{1}{676}}$; 13) $\sqrt[3]{2}=\frac{5}{4}\sqrt[3]{1+0{,}024}$;

14) $\sqrt[4]{17}$; 15) $\sqrt[5]{33}$; 16) $\sqrt[6]{65}$.

Wie heißen die ersten drei Glieder der binomischen Entwickelung von:

17) $(\sqrt[3]{1+x})^5$? 18) $\sqrt[5]{1-x^2}$? 19) $\sqrt[3]{8-x}$?

20) $1:\sqrt[4]{(1+x)^5}$? 21) $\sqrt{1+x+x^2}\left[=\sqrt{1+x(1+x)}\right]$?

22) Bestimme durch binomische Entwickelung den Grenzwert von $\frac{1-\sqrt[n]{1-x}}{x}$ für verschwindend kleine x.

---

§ 16. Die trigonometrischen Reihen.

I) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

II) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

Um gleichzeitig Potenzreihen für $\sin x$ und für $\cos x$ zu gewinnen, setzen wir an:

1) $$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

2) $$\cos x = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$$

Hierbei erinnern wir uns, daß die unabhängige Variable x nicht als ein in Graden, Minuten und Sekunden gegebener Winkel zu betrachten ist, sondern als die Zahl, welche angibt, wievielmal so groß der zugehörige Bogen als der Radius ist, falls der Winkel Zentriwinkel eines Kreises ist. Wenn also $\sin\alpha$ bezw. $\cos\alpha$ durch die obigen Reihen ausgedrückt werden soll, ist $x = \operatorname{arc}\alpha$ zu setzen. Z. B.:

1) Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin x = 1$, $\cos x = 0$;

2) Für $x = \frac{\pi}{3}$ ist $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos x = \frac{1}{2}$;

3) Für $x = \frac{\pi}{4}$ ist $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

4) Für $x = \frac{\pi}{6}$ ist $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

5) Für $x = 1$ ist $\sin x = \sin\frac{180^0}{\pi}$, $\cos x = \cos\frac{180^0}{\pi}$.

Die in der elementaren Trigonometrie gelernten Formeln, welche den Sinus und den Kosinus der Summe zweier Winkel durch den Sinus und den Kosinus der einzelnen Winkel ausdrücken, gelten natürlich auch, wenn die Winkel in der soeben auseinandergesetzten Form (Arcus-Form) gegeben sind, so daß wir haben:

3) $$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

4) $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Um zunächst a_0 und b_0 zu bestimmen, setzen wir in 1) und 2) $x = 0$, woraus, da $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ist, folgt:

$$0 = a_0;\ 1 = b_0.$$

Da $a_0 = 0$ ist, so erhalten wir aus 1):

5) $$\frac{\sin x}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$$

Wenn wir nun x sich der Null nähern lassen, erhalten wir auf der linken Seite von 5) den schon in § 2 bei Figur 1 behandelten Grenzwert, der sich dort gleich 1 ergab, auf der rechten Seite von 5) aber erhalten wir a_1 als Grenzwert, so daß sich ergibt:

$$a_1 = 1.$$

Hierdurch wird nun aus Gleichung 1):

6) $$\sin x = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

Wir benutzen nun das in der Trigonometrie abgeleitete Resultat:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

wenn wir durch Verwandlung von x in $-x$ aus 6) ableiten:

7) $$-\sin x = -x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4 - \ldots$$

Durch Subtraktion der Gleichung 7) von Gleichung 6) und Division durch 2 ergibt sich dann:

8) $$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \ldots$$

Analog verwandeln wir bei 2), wo schon $b_0 = 1$ erkannt ist, x in $-x$, benutzen

$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$$

und erhalten:

9) $$\cos x = 1 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \ldots$$

Addieren wir nun 9) zu 2), und dividieren dann durch 2, so erhalten wir:

10) $$\cos x = 1 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \ldots$$

Wenn wir nun erstens die in 8) und 10) erhaltenen Potenzreihen in 3) einsetzen, erhalten wir:

11)
$$\begin{aligned}&(x+y) + a_3(x+y)^3 + a_5(x+y)^5 + \ldots\\ &= [x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots][1 + b_2 y^2 + b_4 y^4 + \ldots]\\ &+ [1 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \ldots][y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + \ldots],\end{aligned}$$

oder:

12)
$$\begin{aligned}&(x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots)\\ &+ y[1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + 7a_7 x^6 + \ldots]\\ &+ y^2[\ldots] + y^3[\ldots] + \ldots\\ &= (x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots)\\ &+ y[1 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + \ldots]\\ &+ y^2[\ldots] + y^3[\ldots] + \ldots\end{aligned}$$

Wenn wir zweitens die in 8) und 10) erhaltenen Potenzreihen in 4) einsetzen, erhalten wir:

13) $$1+b_2(x+y)^2+b_4(x+y)^4+\ldots$$
$$=[1+b_2x^2+b_4x^4+\ldots][1+b_2y^2+b_4y^4+\ldots]$$
$$-[x+a_3x^3+a_5x^5+\ldots][y+a_3y^3+a_5y^5+\ldots]$$

oder:

14) $$(1+b_2x^2+b_4x^4+b_6x^6+\ldots)$$
$$+y[2b_2x+4b_4x^3+6b_6x^5+\ldots)$$
$$+y^2[\ldots]+y^3[\ldots]+\ldots$$
$$=(1+b_2x^2+b_4x^4+\ldots.)$$
$$+y[-x-a_3x^3-a_5x^5-\ldots]$$
$$+y^2[\ldots]+y^3[\ldots]+\ldots$$

Während der von y freie Koeffizient in den Gleichungen 12) und 14) zu Identitäten führt, ergeben die rechts und links als Koeffizient von y auftretenden Potenzreihen zwei Gleichungen zwischen Potenzreihen, die uns zu den Werten der Koeffizienten

$$a_3,\ a_5,\ a_7,\ \ldots \text{ und } b_2,\ b_4,\ b_6,\ \ldots$$

führen werden.

Aus 12) erhält man durch den rechts und links vorhandenen Koeffizienten von y:

15) $$1+3a_3x^2+5a_5x^4+\ldots=1+b_2x^2+b_4x^4+\ldots$$

Aus 14) erhält man in derselben Weise:

16) $$2b_2x+4b_4x^3+6b_6x^5+\ldots=-x-a_3x^3-a_5x^5-\ldots$$

Wenn wir nun in 16) und in 15) die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleichsetzen, erhalten wir einerseits:

$$2b_2=-1;\ 4b_4=-a_3;\ 6b_6=-a_5,\ \text{u. s. w.;}$$

andrerseits:

$$3a_3=b_2;\ 5a_5=b_4;\ 7a_7=b_6;\ \text{u. s. w.}$$

Hiernach kann man zunächst b_2, dann a_3, dann b_4, dann a_5, dann b_6, dann a_7 u. s. w. in übersichtlichster Weise bestimmen. Es ergibt sich nacheinander:

$$b_2=-\frac{1}{2};\ a_3=-\frac{1}{2\cdot3};\ b_4=+\frac{1}{2\cdot3\cdot4};\ a_5=+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5};$$

$$b_6 = -\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6};\quad a_7 = -\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} \text{ u. s. w.}$$

Das Bildungsgesetz der Koeffizienten ist jetzt unverkennbar. Man erhält nunmehr die in der Überschrift genannten beiden Reihen I) und II:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

und

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Was den Konvergenzbereich dieser beiden Reihen anbetrifft, so ergibt sich leicht, daß dieselben, ebenso wie die in § 12 behandelten Exponentialreihen, für jeden beliebigen Wert von x konvergent sind. Wenn wir nämlich zunächst annehmen, daß die Reihen lauter positive Glieder hätten, so würde das n-te Glied der ersten Reihe heißen:

$$u_n = \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

also:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^2}{(2n+1)\cdot(2n)}.$$

Bei wachsendem n muß nun der Nenner des Bruches

$$\frac{x^2}{(2n+1)(2n)} = \frac{x}{2n+1}\cdot\frac{x}{2n}$$

schließlich größer werden als der Zähler, auch wenn x noch so groß wäre, so daß also $\frac{u^{n+1}}{u_n}$ von einer bestimmten Stelle an kleiner als 1 wird, und für $n = \infty$ Null wird. Demnach wäre die Reihe I) für jedes beliebige x konvergent, wenn ihre Glieder sämtlich positiv wären. Dann muß aber auch nach unsrer dritten Konvergenzregel die Reihe I selbst konvergent sein, und zwar für jedes noch so große x.

Der Beweis, daß auch die Reihe II) für jedes noch so große x konvergent ist, wird in ganz derselben Weise geführt.

Wenn α in Graden gegeben ist, und $\sin\alpha$ bezw. $\cos\alpha$ mit Benutzung der obigen Reihen zu berechnen ist, so ist zu setzen:

$$x = \frac{\alpha\pi}{180} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{90};$$

demnach:

$$\sin\alpha^0 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{90}\right) - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{\alpha}{90}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{\alpha}{90}\right)^5 - \ldots$$

$$\cos\alpha^0 = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{90}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \left(\frac{\alpha}{90}\right)^4 - \ldots$$

Wenn eine nach der Größe des Winkels α geordnete Tafel zu berechnen ist, so wird man die Werte von:

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m$$

von $m = 1$ an ein für allemal berechnen, und dann die Potenzen von $\left(\frac{\alpha}{90}\right)^m$, wobei α kleiner als 45 Grad vorausgesetzt werden darf. Wir nehmen als Beispiel $\alpha = 18$ Grad, und erhalten bei einer Berechnung auf sechs Dezimalstellen, da $\frac{\alpha}{90}$ dann $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ wird:

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}570796, \text{ mult. mit } \frac{2}{10}, \text{ gibt: } 0{,}314159$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0{,}645964, \text{ mult. mit } \frac{2^3}{10^3}, \text{ gibt: } 0{,}005168$$

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0{,}079693, \text{ mult. mit } \frac{2^5}{10^5}, \text{ gibt: } 0{,}000026$$

$$\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0{,}004682, \text{ mult. mit } \frac{2^7}{10^7}, \text{ gibt: } 0{,}000000.$$

Wir sehen, daß vier Glieder der Sinusreihe ausreichen, um $\sin 18^0$ auf 6 Stellen zu berechnen. Wir erhalten:

$$\sin 18^0 = 0{,}309017.$$

Ebenso erhält man aus II):

$$\cos 18^0 = 1{,}000000 - 0{,}049348 + 0{,}000406 - 0{,}000001 = 0{,}951057.$$

Auch $\operatorname{tg} x$ läßt sich leicht in eine Potenzreihe entwickeln. Doch ist bei dieser Tangensreihe das Gesetz der Koeffizienten-Bildung sehr viel verwickelter. Am einfachsten erhält man die Tangensreihe durch die Formel:

17) $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{oder} \quad \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x.$$

Da $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ ist, so kann man, ebenso wie oben bei Sinus zunächst erkennen, daß die Tangensreihe nur ungerade Potenzen von $\operatorname{tg} x$ enthalten kann. Denn aus:

$$\operatorname{tg} x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

und $$-\operatorname{tg} x = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \ldots$$

folgt durch Subtraktion und Division durch Zwei:

$$\operatorname{tg} x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots$$

Nun muß nach 17) sein:

$$\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right]\left[c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots\right]$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

oder:

$$c_1 x + \left(c_3 - \frac{c_1}{2!}\right)x^3 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2!} + \frac{c_1}{4!}\right)x^5 + \ldots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Wir setzen nun die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich, und erhalten:

$$c_1 = 1; \quad c_3 = \frac{c_1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{2}{3!}; \quad c_5 = \frac{c_3}{2!} - \frac{c_1}{4!} + \frac{1}{5!}$$
$$= \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{20 - 5 + 1}{5!} = \frac{16}{5!}; \text{ u. s. w.}$$

Hiernach ist:

18) $$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots,$$

wodurch wenigstens die ersten drei Glieder der Potenzreihe für $\operatorname{tg} x$ festgestellt sind.

Übungen zu § 16.

Berechne in ähnlicher Weise, wie $\sin 18^0$ und $\cos 18^0$ im Text, auch a) den Sinus und b) den Kosinus von:

1) 30^0; 2) 60^0; 3) 36^0; 4) 40^0; 5) 45^0; 6) 3^0.

7) Beweise, daß $\lim\limits_{x=y} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x-y} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ist, und benutze dann allein die Kosinusreihe, um die ersten drei Koeffizienten der Tangensreihe zu bestimmen.

---

§ 17. Die Arcustangens-Reihe und die Berechnung der Zahl π.

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \text{ falls } x \leqq 1;$$

$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a+b}{1-ab};$$

$$\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a-b}{1+ab};$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 4 \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239};$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8}.$$

Wir erinnern uns aus § 3, daß, wenn

$$\operatorname{tg} \alpha = a$$

gesetzt ist,

$$\alpha \text{ als } \operatorname{arc\,tg} a$$

bezeichnet wird. Dabei soll α wieder in Arcus-Form ausgedrückt werden, und immer $< \frac{\pi}{2}$ gedacht werden. Da nämlich

$$\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha,$$

wenn k eine beliebige ganze Zahl ist, so ist die Festsetzung $\alpha < \frac{\pi}{2}$ notwendig, damit nicht die Funktion

$$\operatorname{arc\,tg}\, x$$

für ein und dasselbe x unzählig viele Funktionswerte besitze, die eine arithmetische Reihe mit der konstanten Differenz π bilden würden. Z. B.:

$$\operatorname{arc\,tg}\, 0 = 0;\quad \operatorname{arc\,tg}\, \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6};\quad \operatorname{arc\,tg}\, 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arc\,tg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{3};\quad \operatorname{arc\,tg}\, (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Die in der Trigonometrie abgeleitete Formel:

1) $$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

welche zwischen $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ besteht, kann, nach Feststellung des Begriffs Arcustangens auch so geschrieben werden:

$$\alpha + \beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

Wir setzen nun $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$, also $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\, a$ und $\beta = \operatorname{arc\,tg}\, b$. So erhalten wir:

2) $$\operatorname{arc\,tg}\, a + \operatorname{arc\,tg}\, b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a+b}{1-ab}.$$

In derselben Weise erhält man aus der Formel:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

die folgende Formel:

3) $$\operatorname{arc\,tg}\, a - \operatorname{arc\,tg}\, b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a-b}{1+ab}.$$

Wenn wir nun annehmen, daß $\operatorname{arc\,tg}\, x$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Potenzreihe entwickelbar ist, so können wir zunächst erkennen, daß dieselbe nur ungerade Potenzen von x enthalten kann, weil $\operatorname{tg}(-y) = -\operatorname{tg} y$ ist, also auch umgekehrt:

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$$

sein muß. Denn aus:

$$\operatorname{arc\,tg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

und

$$-\operatorname{arc\,tg} x = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + \ldots$$

folgt durch Subtraktion und Halbierung:

4) $$\operatorname{arc\,tg} x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \ldots$$

Aber auch der Koeffizient a_1 läßt sich von vornherein bestimmen. Denn aus 4) folgt:

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \ldots$$

Wenn wir nun x unendlich klein werden lassen, erhalten wir links, nach § 4, Nr. 5) den Grenzwert 1, rechts aber a_1, also ist

$$a_1 = 1.$$

So wird aus 4):

5) $$\operatorname{arc\,tg} x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \ldots$$

Wenn wir nun in 2) $a = x$, $b = y$ setzen, erhalten wir rechts:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tg}\left[(x+y)(1-xy)^{-1}\right].$$

Nun ist nach § 15 oder auch nach § 7:

$$(1-xy)^{-1} = 1 + xy + (xy)^2 + (xy)^3 + \ldots.$$

Demnach:

$$\begin{aligned}(x+y)(1-xy)^{-1} &= (x+y)(1+xy+x^2y^2+x^3y^3+\ldots)\\ &= x + y(1+x^2) + y^2x(1+x^2) + y^3x^2(1+x^2) + \ldots.\end{aligned}$$

Also ist:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tg}\left[x + y(1+x^2) + y^2x(1+x^2) + \ldots\right].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber, gemäß unserem Ansatze, gleich:

$$\begin{aligned}&\left[x + y(1+x^2) + y^2x(1+x^2) + y^3x^2(1+x^2) + \ldots\right]\\ &+ a_3\left[x + y(1+x^2) + y^2x(1+x^2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]^3\\ &+ a_5\left[x + y(1+x^2) + y^2x(1+x^2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]^5\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Nach 2) muß nun diese Reihe gleich

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$$

sein, oder gleich:

$$(x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots) + (y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + \ldots).$$

Wir erhalten demzufolge:

$$\begin{aligned}
&(x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots) + y + y^3 \cdot a_3 + y^5 \cdot a_5 + \ldots \\
&\quad = [x + y(1 + x^2) + y^2 x(1 + x^2) + \ldots] \\
&+ a_3 [x + y(1 + x^2) + y^2 x(1 + x^2) + \ldots]^3 \\
&+ a_5 [x + y(1 + x^2) + y^2 x(1 + x^2) + \ldots]^5 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Diese Gleichung muß innerhalb des noch festzustellenden Konvergenzbereichs für alle Werte von y richtig sein. Wir benutzen nun die Methode der zu bestimmenden Koeffizienten, wenn wir den Koeffizienten 1 von y^1, der links steht, gleich dem Koeffizienten setzen, der sich rechts bei y^1 ergibt. So kommt:

$$1 = 1 + x^2 + 3 a_3 x^2 (1 + x^2) + 5 a_5 x^4 (1 + x^2) + 7 a_7 x^6 (1 + x^2)$$

oder:

$$0 = x^2 (1 + 3 a_3) + x^4 (3 a_3 + 5 a_5) + x^6 (5 a_5 + 7 a_7) + \ldots$$

Da links Null der Koeffizient aller Potenzen von x ist, so ergibt sich:

$$3 a_3 = -1;\ 5 a_5 = -3 a_3 = +1;\ 7 a_7 = -5 a_5 = -1;$$

$$9 a_9 = -7 a_7 = +1;\ \text{u. s. w.}$$

Also:

$$a_3 = -\tfrac{1}{3};\ a_5 = +\tfrac{1}{5};\ a_7 = -\tfrac{1}{7};\ a_9 = +\tfrac{1}{9}\ \text{u. s. w.}$$

Setzen wir endlich diese Resultate in 5) ein, so erhalten wir die in der Überschrift stehende Potenzreihe:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Da diese Reihe abwechselnde Vorzeichen hat, so haben wir nach dem Leibnitzschen Konvergenz-Kriterium zu

untersuchen, ob von einer bestimmten Stelle an die Glieder kleiner werden, und ob $\lim_{n=\infty} u_n = 0$ wird. Da

$$u_n = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

ist, so sind beide Bedingungen erfüllt, falls x nicht größer als 1 ist. Die Reihe ist also auch noch für $x = 1$ konvergent. Setzt man $x = 1$, so erhält man, da

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

ist, die Leibnitzsche Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots,$$

eine Reihe, deren Konvergenz aus dem Leibnitzschen Konvergenz-Kriterium folgt. Aus ihr kann man leicht Grenzen für $\frac{\pi}{4}$ erhalten. Denn es ist:

$$1 - \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) + \cdots$$

Da in den Klammern rechts lauter positive Zahlen stehen, so ist

$$1 - \frac{\pi}{4} > 0.$$

Andrerseits ist:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \cdots,$$

wo wiederum die Klammern lauter positive Werte einschließen. Also:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} > 0.$$

Demnach muß $\frac{\pi}{4}$ zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 liegen, also π zwischen $2\frac{2}{3}$ und 4.

Wenn wir je zwei aufeinanderfolgende Glieder der Leibnitzschen Reihe zusammenfassen, erhalten wir:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{2}{3 \cdot 5} - \frac{2}{7 \cdot 9} - \frac{2}{11 \cdot 13} - \cdots$$

oder:
$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{2}{11 \cdot 13} + \cdots$$

Ferner:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{13 \cdot 15} + \cdots$$

oder:
$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15} + \cdots$$

Durch Berechnung der Glieder der soeben für $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ und für $\frac{\pi}{8}$ erhaltenen Reihen könnte man $\frac{\pi}{8}$ in immer engere Grenzen einschließen. Doch sind diese Reihen für die Berechnung der Zahl π sehr ungeeignet, weil man, um π auf viele Dezimalstellen erhalten zu können, eine gar zu große Anzahl von Gliedern zu berechnen nötig hätte. Ebenso wenig eignet sich zur Berechnung von π die Reihe, die man erhält, wenn man $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ setzte, nämlich:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3^1} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right].$$

Wohl aber gibt uns die Benutzung der schon oben besprochenen Formel:

$$\operatorname{arc\,tg}\, a - \operatorname{arc\,tg}\, b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a - b}{1 + a\,b}$$

eine Methode an die Hand, um aus mehreren Arcustangens-Reihen, durch Berechnung von nur wenigen Gliedern solcher Reihen, π auf sehr viele Dezimalstellen zu erhalten. Setzen wir nämlich:

$$a = 1,\ b = \frac{1}{2},$$

so ergibt sich:

6) $$\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\cdot\frac{1}{2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}.$$

Nun setzen wir:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = \frac{1}{5}$$

und erhalten:

7) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{5-3}{5\cdot 3+1} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{16} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}.$$

Durch Addition von 6) und 7) erhält man nun:

$$\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8},$$

woraus folgt:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}.$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir in der allgemeinen Arcustangens-Reihe $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{8}$ setzen:

$$\frac{\pi}{4} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \cdots\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{3\cdot 8^3} + \frac{1}{5\cdot 8^5} - \frac{1}{7\cdot 8^7} + \cdots\right]$$

Man kann hiernach π schon viel leichter berechnen, als durch die Leibnitzsche Reihe. Noch besser aber eignet sich der folgende Weg. Man setze in 3) erstens: $a = 1$, $b = \frac{1}{5}$. Dann kommt:

8) $$\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}.$$

Demgemäß setze man in 3) zweitens: $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{5}$. So kommt:

9) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{7}{17}.$$

Drittens setze man in 3) $a=\frac{7}{17}$, $b=\frac{1}{5}$. Dadurch erhält man:

10) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{17} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{7}{17}-\frac{1}{5}}{1+\frac{7}{17}\cdot\frac{1}{5}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{9}{46}.$$

Viertens setze man in 3): $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{9}{46}$. So kommt:

11) $$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{9}{46} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{5}-\frac{9}{46}}{1+\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{46}} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}.$$

Addiert man nun die Gleichungen 8), 9), 10) und subtrahiert man dann von der erhaltenen Summe Gleichung 11), so erhält man:

12) $$\frac{\pi}{4} = 4\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

oder, wegen der Arcustangens-Reihe,

13) $$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots\right].$$

Durch die Gleichung 13), die von dem englischen Mathematiker Machin herrührt, kann man mit Leichtigkeit π auf sieben Dezimalstellen berechnen. Nämlich:

$1:5 = 0{,}20000000$	$1: 3\cdot 5^3 = 0{,}00266667$
$1:5\cdot 5^5 = 0{,}00006400$	$1: 7\cdot 5^7 = 0{,}00000183$
$1:9\cdot 5^9 = 0{,}00000006$	$1:11\cdot 5^{11} = 0{,}00000000$
$0{,}20006406$	$0{,}00266850$
$0{,}00266850$	$\frac{1}{239} = 0{,}00418410$
$0{,}19739556$	$\frac{1}{3\cdot 229^3} = 0{,}00000002$
4	$0{,}00418408$
$0{,}78958224$	
$0{,}00418408$	

$0{,}78539816 = \frac{\pi}{4}$, also:

$$\pi = 3{,}14159264.$$

Die durch die Abrundung auf acht Dezimalstellen verursachte Ungenauigkeit ist so gering, daß der erhaltene achtstellige Dezimalbruch um weniger als ein Einundsiebzig-Millionstel kleiner ist als der wahre Wert von π. Eine Vorstellung von dem Grade der Genauigkeit, die man erhält, wenn man, wie es geschehen ist, π auf hundert Dezimalstellen oder noch mehr berechnet, gibt das in § 4 des I. Bandes meiner „Mathematischen Mußestunden“*) unter Nr. 9) besprochene Beispiel. Die ersten 30 Dezimalstellen der Zahl π kann man leicht durch einen französischen Merkvers behalten, in welchem die aufeinanderfolgenden Worte des Verses durch die Zahl der in ihnen enthaltenen Buchstaben nacheinander die Dezimalstellen von π angeben. Dieser Merkvers lautet:

3, 1 4 1 5 9
Que j'aime à faire apprendre
2 6 5 3 5
Un nombre utile aux sages!
8 9 7 9
Immortel Archimède, artiste ingénieux!
3 2 3 8 4 6 2 6
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
4 3 3 8 3 2 7 9
Pour moi ton problème eut de pareils avantages!

*) „Mathematische Mußestunden“ (Leipzig 1900) in 3 Bänden.

Nach diesem Merkvers ergibt sich auf 30 Dezimalstellen:

$$\pi = 3{,}141\,592\,|\,653\,589\,||\,793\,238\,||\,462\,643\,|||\,383\,279.$$

Übungen zu § 17.

1) Beweise, daß $\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \ldots$ ist.

Entwickele noch Potenzen von x:

2) $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$; 3) $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{10}$; 4) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$; 5) $\operatorname{arc\,tg}(1-x)$.

6) Aus $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha\,(1-\sin^2\beta)^{\frac{1}{2}} - \sin\beta\,(1-\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$ soll $\operatorname{arc\,sin} x$ in eine Potenzreihe entwickelt werden, in ähnlicher Weise, wie im Texte $\operatorname{arc\,tg} x$ aus $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ entwickelt ist. (Man benutze § 15).

7) Berechne π durch $\frac{\pi}{6} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\sqrt{3}$ auf drei Dezimalstellen.

8) Berechne π durch $\frac{\pi}{12} = \operatorname{arc\,tg}(2-\sqrt{3})$ auf drei Dezimalstellen.

Aus den folgenden Gleichungen soll die Zahl p berechnet werden:

9) $$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{5} + \operatorname{arc\,tg} p;$$

10) $$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{6} + \operatorname{arc\,tg} p;$$

11) $$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = \operatorname{arc\,tg} 1 + \operatorname{arc\,tg} p;$$

12) $$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = \operatorname{arc\,tg} 3 - \operatorname{arc\,tg} p;$$

13) $$\operatorname{arc\,tg} 1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} p;$$

14) $$\operatorname{arc\,tg} 1 = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg} p;$$

15) Berechne π durch Nr. 6) aus $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

16) Der Radius eines Kreises beträgt eine Million Kilometer. Wieviel Millimeter beträgt der Umfang? Die gewünschte ganze Zahl soll so angegeben werden, daß sie selbst zu klein, die um 1 größere ganze Zahl schon zu groß ist.

17) Der Radius einer Kugel beträgt einen Kilometer. Das Volumen soll so angegeben werden, daß der Fehler kleiner als ein Kubikmillimeter wird.

III. Abschnitt.

Gleichungen.

§ 18. Die komplexen Zahlen.

I) $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$

II) $\sqrt[m]{\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} = \sqrt[m]{\rho}\left[\cos\frac{\vartheta}{m} + i\sin\frac{\vartheta}{m}\right]$.

Schon in der „Elementaren Arithmetik“ (diese Sammlung, Band I, § 26) haben wir, das Permanenz-Prinzip festhaltend, den Quadratwurzeln aus negativen Zahlen Sinn erteilt und dadurch die imaginären Zahlen in die Sprache der Arithmetik eingeführt. Im Gegensatz zu diesen neuen Zahlen hatten wir die bis dahin definierten Zahlen reelle Zahlen genannt, und erkannt, daß jede imaginäre Zahl als das Produkt einer reellen Zahl mit einer einzigen imaginären Zahl, der imaginären Einheit $\sqrt{-1} = i$, aufgefaßt werden kann, so daß, wenn b jede beliebige reelle Zahl ist,

$$ib$$

jede beliebige imaginäre Zahl bedeutet. Wenn man imaginäre und reelle Zahlen oder imaginäre und imaginäre Zahlen durch die Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division miteinander verknüpft, so gelangt man immer wieder zu reellen oder zu imaginären Zahlen, ausgenommen, wenn man eine reelle mit einer imaginären Zahl durch Addition oder Subtraktion verknüpft. Die Zahlform

$$a + ib$$

wo a und b positive oder negative, rationale oder irrationale, aber reelle Zahlen bedeuten, ist also im allgemeinen weder reell noch imaginär. Man nennt diese Zahlform komplex. Erteilt man b den Wert Null, so stellt $a + ib$ jede reelle Zahl dar, und, wenn $a = 0$ gesetzt wird, jede imaginäre Zahl. Man betrachtet deshalb die reellen und die imaginären Zahlen auch als spezielle komplexe Zahlen.

Wenn die komplexe Zahl $a + ib$ gleich der komplexen Zahl $c + id$ gesetzt werden kann, so folgen daraus zwei Gleichungen, nämlich:

$$\text{sowohl } a = c \text{ als auch } b = d,$$

d. h. die reellen Bestandteile müssen einander gleich sein, ebenso wie die beiden reellen Zahlen, mit denen i multipliziert ist. Denn aus:

$$a + ib = c + id$$

folgt:

$$a - c = i(d - b)$$

oder:

$$(a - c)^2 = i^2 (d - b)^2 = -(d - b)^2.$$

Da nicht allein a und c, sondern auch b und d an sich reell sind, so kann

$$\text{weder } (a - c)^2 \text{ noch } (d - b)^2$$

negativ sein. Also ist:

$$(a - c)^2 \text{ ebenso wie } (d - b)^2$$

Null oder positiv. Demnach steht in der Gleichung

$$(a - c)^2 = -(d - b)^2$$

links Null oder eine positive Zahl, rechts Null oder eine negative Zahl, was nicht möglich ist, außer, wenn beide Seiten der Gleichung Null sind, d. h.

$$a = c \text{ und } b = d \text{ ist.}$$

So folgt aus $a + ib = 3 - 4i$ sowohl $a = 3$, als auch $b = -4$.

Im § 2 haben wir die reellen Zahlen durch Punkte auf einer geraden Linie veranschaulicht, die wir reelle Zahlenachse nennen wollen, wenn wir uns denken, daß jedem ihrer

Punkte eine reelle Zahl entspricht und umgekehrt jeder reellen Zahl einer ihrer Punkte. Da nun jede imaginäre Zahl das Produkt einer reellen Zahl mit i ist, so erhalten wir in derselben Weise eine imaginäre Zahlenachse, so daß jedem Punkte derselben eine imaginäre Zahl und umgekehrt jeder imaginären Zahl ein Punkt der imaginären Zahlenachse entspricht. Es liegt dann folgendes nahe:

Erstens, daß man auf den beiden Zahlenachsen die Strecken gleichmacht, die der Einheit entsprechen, so daß also auf der reellen Zahlenachse zwei Punkte, die Zahlen entsprechen, die sich um c unterscheiden, ebensoweit voneinander abstehen, wie auf der imaginären Zahlenachse zwei Punkte, die Zahlen entsprechen, die sich um $i \cdot c$ unterscheiden;

zweitens, die reelle und die imaginäre Zahlenachse in eine und dieselbe Ebene so zu legen, daß ihr Schnittpunkt die einzige Zahl abbildet, die den Gebieten der reellen Zahlen und der imaginären Zahlen gemeinsam ist, und das ist die Zahl Null;

drittens, die beiden Zahlenachsen sich unter einem rechten Winkel schneiden zu lassen.

Um die Vorstellungen zu fixieren, setzen wir auch noch fest, daß die reelle Zahlenachse horizontal, die imaginäre vertikal liegen soll, und zwar so, daß die positiven reellen Zahlen durch Punkte dargestellt werden, die vom Nullpunkt aus nach rechts hin liegen, die negativen reellen Zahlen durch Punkte, die nach links hin liegen, die Produkte von $+i$ mit positiven Zahlen durch Punkte, die nach oben hin liegen, die Produkte von $+i$ mit negativen Zahlen durch Punkte, die vom Nullpunkt aus nach unten hin liegen.

Hiernach liegt es nun auch nahe, den komplexen Zahlen die Punkte der Ebene entsprechen zu lassen, in der die beiden Zahlenachsen liegen, und zwar so, daß der die Zahl $a + ib$ abbildende Punkt die vierte Ecke des Rechtecks ist, dessen drei andere Ecken sind: erstens der Nullpunkt, in dem sich die beiden Zahlenachsen schneiden, zweitens der Punkt, der die reelle Zahl a abbildet, drittens der Punkt, der die imaginäre Zahl ib abbildet. Beispielsweise sind in der Figur 3 die folgenden komplexen Zahlen abgebildet:

$$+1,\ +\pi,\ -2,\ \pi+i\cdot\frac{5}{2},\ -2+i\sqrt{3},\ -2-i\sqrt{3},\ \sqrt{2}-2i,\ i\pi.$$

Eine Ebene, in der man sich durch ihre Punkte alle komplexen Zahlen abgebildet denken soll, heißt „Gaussische Zahlenebene“.

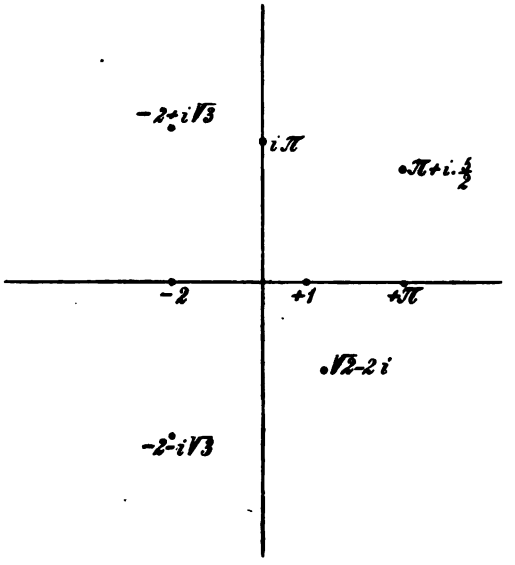

Fig. 8.

Die Abbildung der komplexen Zahlen durch die Punkte der Gaussischen Zahlenebene gibt dazu Veranlassung, die Zahl $a+ib$ in einer etwas abgeänderten Weise darzustellen, nämlich durch den Abstand r, den der Bildpunkt der Zahl $a+ib$ vom Nullpunkt hat, und durch den Winkel φ, den die Verbindungslinie beider Punkte mit der positiv-reellen Richtung (rechts) bildet, so daß also, nach den Elementen der Trigonometrie:

$$a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$$

zu setzen ist, und deshalb die komplexe Zahl $a+ib$ selbst in der Form

$$r\cos\varphi + i\cdot r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

dargestellt erscheint. Den Abstand r nennt man den Modulus der komplexen Zahl, den Winkel φ ihr Argument.

Der Modulus r der komplexen Zahl $a + ib$ ergibt sich durch den pythagoräischen Lehrsatz aus:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

das Argument dann aus:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} \text{ und } \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Um eine komplexe Zahl $a + ib$ durch Modulus und Argument richtig darzustellen, achte man immer darauf, in welchem der vier Quadranten, die von den beiden Zahlenaxen gebildet werden, der Bildpunkt von $a + ib$ liegt. Sind nämlich:

1) a und b positiv, so liegt das Bild von $a + ib$ in dem Quadranten rechts oben, und φ ist ein Winkel zwischen 0 Grad und 90 Grad;
2) a negativ, b negativ, so liegt das Bild von $a + ib$ in dem Quadranten links oben, und φ ist ein Winkel zwischen 90 Grad und 180 Grad;
3) a negativ, b positiv, so liegt das Bild von $a + ib$ in dem Quadranten links unten, und φ ist ein Winkel zwischen 180 Grad und 270 Grad;
4) a positiv, b negativ, so liegt das Bild von $a + ib$ in dem Quadranten rechts unten, und φ ist ein Winkel zwischen 270 Grad und 360 Grad.

Die Bestimmung des Modulus r und des Arguments φ einer in der Form $a + ib$ gegebenen komplexen Zahl zeigen folgende Beispiele:

1) Für die komplexe Zahl $-1 + i$ ist der Modulus $r = \sqrt{2}$, das Argument $\varphi = 135^0$;
2) Für $+\frac{5}{2}i$ ist der Modulus $r = \frac{5}{2}$, das Argument φ gleich 90^0;
3) Für $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ ist der Modulus $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$, das Argument $\varphi = 240$ Grad, weil das Bild der komplexen Zahl $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ in dem links unten befindlichen Quadranten liegt;

4) Für $x = -\pi$ ist der Modulus $r = \pi$, das Argument $\varphi = 180^0$.

5) Für $x = 5 - 5i$ ist der Modulus $r = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$, das Argument $\varphi = 315^0$, weil

$$\sin\varphi = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\varphi = \frac{+5}{5\sqrt{2}} = +\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist, und nur zwischen 270^0 und 360^0 der Sinus negativ und der Cosinus positiv ist.

Für die durch Modulus und Argument dargestellten komplexen Zahlen sind die Gesetze der Multiplikation und Division einfacher, als für die in der bisherigen Weise dargestellten komplexen Zahlen. Wenn man nämlich zwei komplexe Zahlen:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ und } r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

zu multiplizieren hat, erhält man zunächst:

$$rr'[\cos\varphi\cos\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' + i\cos\varphi\sin\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'],$$

da $i^2 = -1$ ist. Nach Anwendung zweier Grundformeln der Trigonometrie erhält man nun:

$$rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')]$$

Hieraus folgt:

Der Modulus des Produkts zweier komplexer Zahlen ist das Produkt ihrer beiden Moduli; aber das Argument des Produkts zweier komplexer Zahlen ist die Summe ihrer beiden Argumente.

Beispielsweise ist:

$$(-1 + i)(5 - 5i)$$
$$= \sqrt{2}(\cos 135^0 + i\sin 135^0) \cdot 5\sqrt{2}(\cos 315^0 + i\sin 315^0)$$
$$= 10(\cos 450^0 + i\sin 450^0) = 10(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$
$$= 10(0 + i \cdot 1) = 10i,$$

ein Resultat, das man, in diesem so einfachen Falle, auch leicht direkt hätte erhalten können.

Durch wiederholte Anwendung des obigen Satzes gelangt man ohne weiteres zu dem folgenden allgemeineren Satze:

Der Modulus des Produkts von beliebig vielen komplexen Zahlen ist das Produkt ihrer sämtlichen Moduli; aber das Argument ihres Produkts ist die Summe ihrer sämtlichen Argumente.

Wenn insbesondere diese beliebig vielen komplexen Zahlen eine und dieselbe Zahl, nämlich:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

sind, so erhält man die Formel:

1) $$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m = r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),$$

wo m eine positive ganze Zahl ist.

In Worten lautet dieses Resultat:

Der Modulus der m-ten Potenz einer beliebigen komplexen Zahl ist die m-te Potenz ihres Modulus; aber das Argument ihrer m-ten Potenz ist m mal so groß, als ihr Argument. Z. B.:

1) $$(-1+i)^3 = [\sqrt{2}(\cos 135^0 + i\sin 135^0)]^3$$
$$= 2\sqrt{2}[\cos 405^0 + i\sin 405^0]$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\cos 45^0 + i\sin 45^0\right] = 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right] = 2+2i;$$

2) $$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\frac{1}{2}\right)^{10} = \left[1\cdot\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right)\right]^{10}$$
$$= 1\cdot[\cos 300^0 + i\sin 300^0] = \cos 60^0 - i\sin 60^0$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Aus Formel I) der Überschrift ergibt sich für $r = 1$:

2) $$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi.$$

Durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf die linke Seite dieser Gleichung kann man Formeln erhalten, welche den Cosinus und den Sinus des Vielfachen eines Winkels durch die Potenzen des Cosinus und des Sinus des einfachen Winkels ausdrücken. Dabei kommt der oben besprochene Satz zur Anwendung, daß, wenn zwei komplexe Zahlen gleich sind, sowohl die reellen Bestandteile unter sich

gleich sein müssen, als auch die mit i multiplizierten reellen Zahlen unter sich gleich sein müssen. Ferner hat man dabei zu beachten, daß $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^5 = +i$, und überhaupt:

$$i^{4p} = +1, \quad i^{4p+1} = +i,$$
$$i^{4p+2} = -1, \quad i^{4p+3} = -i$$

ist, wo p eine ganze Zahl ist. So ergibt sich aus 2) für $m = 2, = 3, = 4$ u. s. w.:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$
$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$$
$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$

und überhaupt:

$$\cos m\varphi = \cos^m\varphi - m_2\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi + m_4\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi - m_6\cos^{m-6}\varphi\sin^6\varphi + \ldots,$$

wo $m_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$, $m_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ u. s. w ist.

Analog ergibt sich durch Gleichsetzung der beiderseits vorhandenen, mit i multiplizierten reellen Zahlen:

$$\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi,$$
$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi,$$
$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi,$$

und überhaupt:

$$\sin m\varphi = m_1\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - m_3\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + m_5\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi - m_7\cos^{m-7}\varphi\sin^7\varphi + \ldots$$

wo $m_1 = \frac{m}{1}$, $m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$,

$m_5 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$ u. s. w. ist.

Während Formel I) lehrt, wie eine komplexe Zahl mit m zu potenzieren ist, lehrt eine zweite Formel, wie eine

komplexe Zahl mit m zu radizieren ist. Diese zweite Formel erhält man leicht aus der ersten, indem man setzt:

$$m\varphi = \vartheta, \text{ also } \varphi = \frac{\vartheta}{m}$$

und:

$$r^m = \rho, \text{ also } r = \sqrt[m]{\rho}.$$

Dadurch kommt aus 1):

$$\left[\sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta}{m} + i\sin\frac{\vartheta}{m}\right)\right]^m = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

Wenn man diese Gleichung mit m radiziert, d. h. mit $\frac{1}{m}$ potenziert, und ihre beiden Glieder vertauscht, so erhält man:

3) $$\sqrt[m]{\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta} = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta}{m} + i\sin\frac{\vartheta}{m}\right),$$

oder in Worten:

Der Modulus der m-ten Wurzel einer beliebigen komplexen Zahl ist die m-te Wurzel ihres Modulus; aber das Argument ihrer m-ten Wurzel ist der m-te Teil ihres Arguments. Z. B.:

1) $$\sqrt{i} = \sqrt{1\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)} = \cos 45^0 + i\sin 45^0$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2};$$

2) $$\sqrt[9]{-1+i} = \sqrt[9]{\sqrt{2}(\cos 135^0 + i\sin 135^0)} = \sqrt[18]{2}(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$$
$$= \sqrt[18]{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\cdot\sqrt[18]{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

In Formel 3) und in den Beispielen 1) und 2) ist vorläufig die Wurzel als eindeutig aufgefaßt, also ebenso wie im § 30 und 31 der „Elementaren Arithmetik“ (Band I dieser Sammlung). Die Berücksichtigung aller m m-ten Wurzeln aus komplexen Zahlen folgt erst im § 19.

Wenn wir die Formel 3) beiderseits mit n potenzieren, so können wir das Resultat auch so schreiben:

4) $$\left[\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\right]^{\frac{n}{m}} = \rho^{\frac{n}{m}}\left[\cos\frac{n}{m}\vartheta + i\sin\frac{n}{m}\vartheta\right]$$

oder in Worten:

Eine komplexe Zahl wird mit einer beliebigen positiven rationalen Zahl potenziert, indem man mit dieser Zahl den Modulus potenziert, das Argument aber multipliziert und aus dem so potenzierten Modulus und so multipliziertem Argument eine neue komplexe Zahl zusammensetzt. Z. B.:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{\frac{5}{4}} = \left[2\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right)\right]^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{5}{4}}\left(\cos 45^0 + i\sin 45^0\right)$$

$$= \sqrt[4]{8}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{4} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{32} + i\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2} + i\cdot\sqrt[4]{2}.$$

Daß die eben genannte Regel auch richtig ist, wenn die rationale Zahl, mit der die komplexe Zahl zu potenzieren ist, negativ ist, geht aus der folgenden Überlegung hervor, in welcher p als eine positive rationale Zahl gedacht ist:

$$\left[\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\right]^{-p} = \frac{1}{\left[\rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\right]^{p}}$$

$$= \frac{1}{\rho^p(\cos p\vartheta + i\sin p\vartheta)} = \frac{\rho^{-p}(\cos p\vartheta - i\sin p\vartheta)}{(\cos p\vartheta + i\sin p\vartheta)(\cos p\vartheta - i\sin p\vartheta)}$$

$$= \frac{\rho^{-p}(\cos p\vartheta - i\sin p\vartheta)}{\cos^2 p\vartheta + \sin^2 p\vartheta} = \rho^{-p}\left[\cos(-p\vartheta) + i\sin(-p\vartheta)\right].$$

Da nach § 1 zwei irrationale Zahlen gleich sind, wenn sie immer zwischen denselben beiden rationalen Grenzen liegen bleiben, wie weit man dieselben auch einander nähern mag, so ist das zu Formel I) ausgesprochene Resultat auch richtig, wenn m irrational ist. Es gilt also dieses Resultat für jede Zahl m, wenn dieselbe nur reell ist.

Übungen zu § 18.

Bilde in der Gaussischen Zahlenebene ab:

1) $4+3i$; 2) $-4+3i$; 3) $3\frac{1}{2}-i$; 4) $-5+i\cdot\frac{3}{4}$; 5) $-\sqrt{2}+i$;
6) $\frac{1}{2}-i\cdot\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 8) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}+i\cdot\frac{1}{2}$; 9) $-\sqrt{5}-2i$.

Berechne Modulus und Argument der folgenden komplexen Zahlen:

10) $12+5i$; 11) $-\frac{3}{4}+i$; 12) $-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$
13) $\frac{1}{2}\sqrt{3}-i\cdot\frac{1}{2}$.

Berechne die komplexen Zahlen, bei denen der Modulus r und das Argument φ folgende Werte haben:

14) $r=2$, $\varphi=60^0$; 15) $r=\sqrt{2}$, $\varphi=120^0$; 16) $r=1$, $\varphi=72^0$,
17) $r=13$, $\varphi=210^0$; 18) $r=19$, $\varphi=19^0$; 19) $r=2$, $\varphi=330^0$.

Zwei komplexe Zahlen sind durch ihre Moduli r und r' und ihre Argumente φ und φ' gegeben. Berechne Modulus und Argument ihres Produktes für:

20) $r=3$, $\varphi=20^0$, $r'=4$, $\varphi'=40^0$; 21) $r=\sqrt{3}$, $\varphi=30^0$,
$r'=\sqrt{12}$, $\varphi=60^0$; 22) $r=1$, $\varphi=19^0$, $r'=2$, $\varphi'=161^0$,
23) $r=3$, $\varphi=1^0$, $r'=\frac{1}{3}$, $\varphi'=269^0$.

24) Fünf komplexe Zahlen haben als Moduli: 1, 2, 3, 4, 5 und als Argumente beziehungsweise 20^0, 30^0, 40^0, 100^0, 35^0. Berechne das Produkt dieser fünf komplexen Zahlen.

25) Die Bilder von drei komplexen Zahlen liegen sämtlich auf der reellen Achse nach der linken negativen Seite hin. Wie heißt das Argument ihres Produktes?

26) Die Bilder von sechs komplexen Zahlen liegen sämtlich auf derselben Halbachse, auf der auch das Bild von $+i$ liegt. Wo liegt das Bild ihres Produktes?

Wie heißt die fünfte Potenz derjenigen komplexen Zahlen, bei denen der Modulus r und das Argument φ die folgenden Werte haben:

27) $r=2$, $\varphi=30^0$; 28) $r=\sqrt{2}$, $\varphi=18^0$; 29) $=r\sqrt[5]{2}$, $\varphi=60^0$;
30) $r=1$, $\varphi=162^0$; 31) $r=\frac{1}{3}$, $\varphi=351^0$; 32) $r=1$, $\varphi=13^0$.

Benutze die Theorie der komplexen Zahlen, um durch $\sin\varphi$ auszudrücken:

33) $\sin 3\varphi$; 34) $\sin 5\varphi$; 35) $\sin 7\varphi$; 36) $\sin 9\varphi$.

Benutze die Theorie der komplexen Zahlen, um durch $\cos\varphi$ auszudrücken:

37) $\cos 2\varphi$; 38) $\cos 4\varphi$; 39) $\cos 6\varphi$; 40) $\cos 8\varphi$.

41) Drücke $\operatorname{tg} 7\varphi$ durch $\operatorname{tg}\varphi$ aus.

Berechne:

42) $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}}$; 43) $\sqrt[5]{i}$; 44) $\sqrt[6]{-1}$; 45) $\sqrt[6]{\cos 18^0+i\sin 18^0}$;

46) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 47) $\left(-1\right)^{\frac{5}{6}}$; 48) $\left(1+i\right)^{-1}$;

49) $\left(-1+i\right)^{-\frac{1}{2}}$; 50) $\left(2+i\sqrt{5}\right)^{-\frac{5}{2}}$.

---

§ 19. Die binomischen Gleichungen.

Wenn $x^n=(\rho,\vartheta)$ ist, so ist:

$$x_i=\left(\sqrt[n]{\rho},\ \frac{\vartheta}{n}+\frac{i-1}{n}\cdot 360^0\right) \text{ wenn } 1\leqq i\leqq n \text{ ist.}$$

Eine Gleichung von der Form:

$$x^n=a,$$

wo a eine beliebige komplexe Zahl und x unbekannt ist, heißt eine binomische Gleichung. Schon in § 18 sind die reellen Zahlen als komplexe Zahlen aufgefaßt, die das Argument 0 Grad oder 180 Grad haben, je nachdem die reelle Zahl positiv oder negativ ist. Wenn wir also die binomische Gleichung

$$x^n=\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$$

lösen, so umfassen wir den Fall:

$$x^n=a, \text{ wo a reell ist,}$$

mit. Der Kürze wegen setzen wir

$$\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta) \text{ gleich } (\rho,\vartheta).$$

Wenn wir in der Formel 3) des § 18 ϑ um 360 Grad wachsen lassen, so bleibt die linke Seite ungeändert, weil $\cos(\vartheta + 360^0) = \cos\vartheta$ und $\sin(\vartheta + 360^0) = \sin\vartheta$ ist. Die rechte Seite aber ändert sich dann, weil

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{m} + \frac{360}{m}\right) \text{ bezw. } \sin\left(\frac{\vartheta}{m} + \frac{360}{m}\right)$$

im allgemeinen verschieden ist von

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{m}\right) \text{ bezw. } \sin\left(\frac{\vartheta}{m}\right).$$

Auch wenn man in Formel 3) des § 18

$$\vartheta \text{ um } k \cdot 360^0$$

wachsen läßt, wo k eine ganze Zahl ist, so ändert sich die linke Seite dieser Formel gar nicht, wohl aber im allgemeinen die rechte Seite, weil dort das Argument um $\frac{k}{m} \cdot 360^0$ wachsen muß. Demnach wird, wegen der Formel 3) des § 18, die Gleichung

$$x^n = (\rho, \vartheta)$$

durch jedes x erfüllt, dessen Modulus $\sqrt[n]{\rho}$ ist, und dessen Argument

$$\frac{\vartheta}{n} + \frac{k}{n} \cdot 360^0$$

ist. Da jedoch $\frac{n}{n} \cdot 360^0 = 360^0$, $\frac{n+1}{n} \cdot 360^0 = 360^0 + \frac{1}{n} \cdot 360^0$, $\frac{n+2}{n} \cdot 360^0 = 360^0 + \frac{2}{n} \cdot 360^0$ u. s. w. ist, und da ein Cosinus und ein Sinus sich nicht ändern, wenn der Winkel um 360 Grad wächst, so erhält man alle verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$x^n = (\rho, \vartheta),$$

wenn man in

$$\frac{\vartheta}{n} + \frac{k}{n} \cdot 360^0$$

für k die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bis $n-1$ einsetzt, so daß, wenn $i-1$ eine dieser Zahlen ist, die Abkürzung:

$$\left(\sqrt[n]{\rho}, \frac{\vartheta}{n} + \frac{i-1}{n} \cdot 360^0\right)$$

die n Lösungen der Gleichung

$$x^n = (\rho, \vartheta)$$

darstellt. Alle diese Lösungen haben also einen und denselben Modulus $\sqrt[n]{\rho}$, und ihre Argumente sind:

$$\frac{\vartheta}{n}, \quad \frac{\vartheta}{n} + \frac{1}{n} \cdot 360^0, \quad \frac{\vartheta}{n} + \frac{2}{n} \cdot 360^0,$$

$$\frac{\vartheta}{n} + \frac{3}{n} \cdot 360^0 \text{ u. s. w. bis } \frac{\vartheta}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot 360^0.$$

Hierzu zwei Beispiele:

1) Es sei die Gleichung:

$$x^5 = 2 + 2i$$

zu lösen. Der Modulus ρ der komplexen Zahl $2 + 2i$ beträgt $\sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, ihr Argument $\vartheta\, 450^0$, so daß $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$ der Modulus jeder der fünf Lösungen der Gleichung ist, während ihre fünf Argumente sind:

$$\frac{45^0}{5} = 9^0 \text{ sowie}$$

zweitens: $\quad 9^0 + \frac{360^0}{5} = 9^0 + 72^0 = 81^0;$

drittens: $\quad 9^0 + \frac{2}{5} \cdot 360^0 = 9^0 + 144^0 = 153^0;$

viertens: $\quad 153^0 + 72^0 = 225^0$; fünftens: 297^0.

Um die fünf Lösungen der Gleichung:

$$x^5 = 2 + 2i$$

numerisch in der Form $a + ib$ darzustellen, hat man also die Produkte von $\sqrt[5]{2\sqrt{2}}$ mit den Cosinussen und den Sinussen der folgenden Winkel zu berechnen:

$$9^0, \; 81^0, \; 153^0, \; 225^0, \; 297^0.$$

Natürlich kann man diese Cosinusse und Sinusse auf solche von Winkeln reduzieren, die nicht größer als 45^0 sind, indem:

$$\cos 81^0 + i \sin 81^0 = \sin 9^0 + i \cos 9^0;$$
$$\cos 153^0 + i \sin 153^0 = -\cos 27^0 + i \sin 27^0;$$
$$\cos 225^0 + i \sin 225^0 = -\cos 45^0 - i \sin 45^0;$$
$$\cos 297^0 + i \sin 297^0 = +\sin 27^0 - i \cos 27^0$$

gesetzt werden kann. Wir prüfen, ob die vierte Lösung richtig ist, indem wir nachrechnen, ob die fünfte Potenz von

$$-\sqrt[5]{2\sqrt{2}} \cos 45^0 - \sqrt[5]{2\sqrt{2}} \sin 45^0$$

sich gleich $2 + 2i$ ergibt. Dies ist der Fall, da:

$$\left[-\sqrt[5]{2\sqrt{2}} \cos 45^0 - \sqrt[5]{2\sqrt{2}} \sin 45^0\right]^5 = -2\sqrt{2}(\cos 45^0 + i \sin 45^0)^5 = -2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^5 (1+i)^5 = -\frac{1}{2}(1+i)^5$$
$$= -\frac{1}{2}(1+i)^2(1+i)^2(1+i) = -\frac{1}{2}(2i)(2i)(1+i)$$
$$= -\frac{1}{2}(-4)(1+i) = 2(1+i) = 2 + 2i \text{ ist.}$$

2) Es sei die Gleichung:

$$x^9 = -1$$

zu lösen. Der Modulus der komplexen Zahl -1 ist $+1$, ihr Argument 180^0. Da $\sqrt[9]{1} = 1$ ist, so ist der Modulus der gesuchten 9 Lösungen 1. Ihre Argumente sind:

$$\frac{180^0}{9} = 20^0, \text{ ferner } 20^0 + \frac{1}{9} \cdot 360^0 = 20^0 + 40^0 = 60^0,$$
$$20^0 + \frac{2}{9} \cdot 360^0 = 100^0 \text{ u. s. w.}$$

so, daß jedes folgende Argument um $\frac{360^0}{9} = 40^0$ größer ist, als das vorhergehende. Die gesuchten neun Lösungen der Gleichung $x^9 = -1$ sind also:

$$x_1 = \cos 20^0 + i \sin 20^0,$$
$$x_2 = \cos 60^0 + i \sin 60^0 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$x_3 = \cos 100^0 + i \sin 100^0 = -\sin 10^0 + i \cdot \cos 10^0,$$

$$x_4 = \cos 140^0 + i \sin 140^0 = -\cos 40^0 + i \cdot \sin 40^0,$$
$$x_5 = \cos 180^0 + i \sin 180^0 = -1,$$
$$x_6 = \cos 220^0 + i \sin 220^0 = -\cos 40^0 - i \sin 40^0,$$
$$x_7 = \cos 260^0 + i \sin 260^0 = -\sin 10^0 - i \cos 10^0,$$
$$x_8 = \cos 300^0 + i \sin 300^0 = +\cos 60^0 - i \sin 60^0$$
$$= +\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$x_9 = \cos 340^0 + i \sin 340^0 = +\cos 20^0 - i \sin 20^0.$$

Man hat also nur die Sinusse und Cosinusse der Winkel 10^0, 20^0 und 40^0 aufzuschlagen, um die neun Lösungen der Gleichung $x^9 = -1$ auch numerisch angeben zu können.

Die Werte von x, welche, für x eingesetzt, eine Gleichung n-ten Grades befriedigen, nennt man auch „Wurzeln" der Gleichung, obwohl nicht immer eine Wurzel-Ausziehung ausreicht, um solche Wurzeln zu finden. Algebraisch heißt eine Gleichung, deren Unbekannte x ist, wenn in ihr eine ganze Funktion von x (vgl. § 3) gleich Null gesetzt ist. Die hier behandelten binomischen Gleichungen sind also sehr spezielle algebraische Gleichungen, indem die gleich Null gesetzte ganze Funktion von x lediglich $x^n - a$ ist. Da die n Wurzeln jeder binomischen Gleichung sämtlich einen und denselben Modulus haben, so müssen ihre Bildpunkte in der Gaussischen Zahlenebene (vgl. § 18) auf der Peripherie des Kreises liegen, der um den Nullpunkt dieser Zahlenebene beschrieben ist, und der den gemeinsamen Modulus als Radius hat. Wenn ferner die komplexe Zahl, der in der binomischen Gleichung x^n gleichgesetzt ist, das Argument ϑ hat, so sind die Argumente ihrer n Wurzeln, wie oben gezeigt ist:

$$\frac{\vartheta}{n},\ \frac{\vartheta}{n} + \frac{1}{n} \cdot 360^0,\ \frac{\vartheta}{n} + \frac{2}{n} \cdot 360^0,\ \text{u. s. w.}$$
$$\text{bis } \frac{\vartheta}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot 360^0.$$

Demnach ist das Argument jeder folgenden Wurzel um $\frac{360^0}{n}$, d. h. um den n-ten Teil der vollen Umdrehung größer

als das Argument der vorhergehenden Wurzeln. Daraus folgt aber, daß die Bildpunkte der n Wurzeln einer binomischen Gleichung die erwähnte um den Nullpunkt beschriebene Kreisperipherie in n gleiche Teile teilen. Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

Die n Punkte, welche in der Gaussischen Zahlenebene die n Wurzeln der Gleichung $x^n = a$ darstellen, wo a eine beliebige komplexe Zahl ist, liegen auf dem Kreise, der den Nullpunkt der Zahlenebene als Zentrum und den Modulus von $\sqrt[n]{a}$ als Radius hat, und zwar teilen jene n Punkte diesen Kreis immer in n gleiche Teile. Deshalb nennt man die binomischen Gleichungen auch Kreisteilungs-Gleichungen.

Die oben gegebene Lösung der binomischen Gleichungen ist keine eigentliche Lösung, da sie, um deren Wurzeln angeben zu können, voraussetzt, daß man den Cosinus und den Sinus von

$$\frac{\vartheta}{n} + \frac{i}{n} \cdot 360^0$$

finden kann. Die obige Lösung gibt aber in keiner Weise Mittel in die Hand, um

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{i}{n} \cdot 360^0\right) \text{ bezw. } \sin\left(\frac{\vartheta}{n} + \frac{i}{n} \cdot 360^0\right)$$

numerisch angeben zu können. Sie setzt vielmehr voraus, daß dem Lösenden Tafeln zu Gebote stehen, welche die Cosinusse und Sinusse aller möglichen Winkel enthalten. Wie aber solche Tafeln zu berechnen sind, geht aus der obigen Lösung nicht hervor. Wenn es nun aber umgekehrt gelingt, Wurzeln der Gleichung $x^n = a$ auf anderem Wege zu finden, so liefert uns die obige Lösung das Mittel, um den Cosinus und den Sinus gewisser Winkel zu finden. Beispielsweise kann man die Gleichung $x^3 = 1$ durch eine quadratische Gleichung lösen, und dadurch $\cos 120^0$, $\sin 120^0$, $\cos 240^0$ und $\sin 240^0$ finden. Denn aus $x^3 - 1 = 0$ folgt:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Nun ergibt $x - 1 = 0$ die selbstverständliche Lösung $x = 1$, während

$$x^2 + x + 1 = 0$$

die Lösungen:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

ergeben. Nach der obigen Lösung aber käme, außer

$$x = \cos 0^0 + i \sin 0^0 = 1$$

noch:

$$\cos 120^0 + i \sin 120^0 \text{ und } \cos 240^0 + i \sin 240^0,$$

so daß wir erkennen können, daß:

$$\cos 120^0 = -\frac{1}{2}, \quad \sin 120^0 = \frac{1}{2} i\sqrt{3},$$

$$\cos 240^0 = -\frac{1}{2}, \quad \sin 240^0 = -\frac{1}{2} i\sqrt{3}$$

sein muß.

Wenn a eine reelle Zahl ist, so unterscheiden sich die n Lösungen von

$$x^n = a \text{ und von } x^n = 1$$

nur dadurch, daß jede der n Wurzeln von $x^n = 1$ mit $\sqrt[n]{a}$ zu multiplizieren ist, um die entsprechende Wurzel von $x^n = a$ zu liefern. Deshalb sind die Lösungen von

$$x^n = 1,$$

die man die n-ten Wurzeln der Einheit nennt, von grundlegender Bedeutung. In vielen Fällen kann man die Wurzeln der Einheit durch Lösen von Gleichungen finden, deren Grad 2 nicht übersteigt. Hier folgen die n-ten Wurzeln der Einheit für n gleich 1 bis n gleich 6:

1) Die erste Wurzel der Einheit ist $+1$;

2) Die zwei zweiten Wurzeln der Einheit sind $+1$ und -1;

3) Die drei dritten Wurzeln der Einheit sind schon oben gefunden, nämlich:

$$x_1 = +1, \; x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}, \; x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3};$$

4) Die vier vierten Wurzeln der Einheit gehen aus:

$$x^4 - 1 = 0$$

durch die Zerlegung:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

hervor, und sind demgemäß:

$$x_1 = +1,\ x_2 = +i,\ x_3 = -1,\ x_4 = -i;$$

5) Um die fünf fünften Wurzeln der Einheit zu finden, schließen wir aus:

$$x^5 = 1$$

$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$ und lösen die Gleichung:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

indem wir sie durch x^2 dividieren, und dann ihre Glieder so zusammenfassen, wie folgt:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Wenn wir nun $x + \frac{1}{x} = y$ setzen, also $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, erhalten wir:

$$y^2 - 2 + y + 1 = 0$$

oder:

$$y^2 + y - 1 = 0,$$

woraus folgt:

$$y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Nun war $x + \frac{1}{x} = y$ gesetzt, woraus folgt:

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

oder:

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1} = \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - 4}.$$

Nun ist:

$$y^2 - 4 = \frac{1}{4} \mp \frac{2}{4}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - 4 = -\frac{10}{4} \mp \frac{2}{4}\sqrt{5},$$

also:

$$\sqrt{y^2 - 4} = \frac{1}{2} i \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}.$$

Setzt man nun ein, so erhält man:

$$x = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{5} \pm \frac{1}{4} i \sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}.$$

Der Entstehung dieses Ausdrucks gemäß, enthält dieser Ausdruck nicht acht, sondern nur vier Werte von x, da, wenn zu Anfang $+\frac{1}{4}\sqrt{5}$ gewählt ist, auch am Schluß nur $+2\sqrt{5}$ zu nehmen ist und ebenso zu dem anfänglichen $-\frac{1}{4}\sqrt{5}$ am Schluß $-2\sqrt{5}$ zugehört. Also sind die fünf fünften Wurzeln der Einheit folgende: $x_1 = 1$ und dann:

$$x_2 = +\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) + \frac{1}{4} i \sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

$$x_3 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{4} i \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$x_4 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1) - \frac{1}{4} i \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$x_5 = +\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{4} i \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Da es uns gelang, die fünften Wurzeln der Einheit auf anderem Wege, als durch die Gaussische Zahlebene zu finden, so haben wir dadurch auch die Cosinusse und Sinusse aller Vielfachen von $\frac{360^0}{5} = 72^0$ ermittelt, nämlich:

$$\cos 72^0 = \sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1);$$

$$\sin 72^0 = \cos 18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

$$\cos 144^0 = -\cos 36^0 = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1);$$

$$\sin 144^0 = +\sin 36^0 = +\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Die beiden übrigen Wurzeln ergeben nur die soeben gefundenen Cosinus- und Sinus-Werte noch einmal.

6) Um die sechs sechsten Wurzeln der Einheit zu finden, gehen wir von $x^6 = 1$ aus, schließen daraus $x^6 - 1 = 0$ und zerlegen $x^6 - 1$ in Faktoren. So erhalten wir:

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$$
$$= (x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1) = 0.$$

Die vier nicht reellen Wurzeln ergeben sich also:

$$\text{aus } x^2 + x + 1 = 0 \text{ und aus } x^2 - x + 1 = 0,$$

woraus folgt:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3} \text{ und } x = +\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3}.$$

Wenn wir nun die sechs Wurzeln wieder in derselben Reihenfolge schreiben, wie ihre Bildpunkte von dem Punkte $+1$ aus auf der Peripherie desjenigen Kreises aufeinanderfolgen, der diese Punkte alle enthält, so erhalten wir:

$$x_1 = +1; \quad x_2 = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}; \quad x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3};$$

$$x_4 = -1; \quad x_5 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}; \quad x_6 = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}.$$

Wenn man diejenige n-te Wurzel der Einheit, welche das kleinste positive Argument hat mit ε bezeichnet, so muß

$$\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \ldots$$

und überhaupt jede p-te Potenz von ε, wo p ganzzahlig ist, wiederum eine n-te Wurzel der Einheit darstellen, z. B. für $n = 4$:

$$i^1 = i, \; i^2 = -1, \; i^3 = -i, \; i^4 = +1, \; i^5 = +i, \ldots$$

und überhaupt:

$$i^{4n} = +1, \; i^{4n+1} = +i, \; i^{4n+2} = -1, \; i^{4n+3} = -i.$$

Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, daß nach § 18:

$$\left(\cos\frac{360^0}{n}+i\sin\frac{360^0}{n}\right)^p=\cos\frac{p}{n}360^0+i\sin\frac{p}{n}260^0$$

ist. Wenn n eine Primzahl ist, so müssen:

$$\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^4,\ldots\ \varepsilon^n$$

die sämtlichen n n-ten Wurzeln der Einheit auch dann darstellen, wenn ε von 1 verschieden ist, sonst aber irgend eine n-te Wurzel der Einheit bedeutet. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, daß

$$\varepsilon=\cos\frac{k}{n}360^0+i\sin\frac{k}{n}360^0$$

sei, wo k eine der Zahlen von 1 bis $n-1$ ist. Dann ist $\varepsilon^n=1$. Daß

$$\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ldots\ \varepsilon^{n-1}$$

wiederum Wurzeln der Einheit darstellen, folgt daraus, daß ε^p die (p mal k)-te Potenz von

$$\cos\frac{360^0}{n}+i\sin\frac{360^0}{n}$$

ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen übrig, daß die p-te Potenz und die q-te Potenz von

$$\varepsilon=\cos\frac{k}{n}360^0+i\sin\frac{k}{n}360^0$$

verschieden sein müssen, wenn p und q verschieden und kleiner als n sind. Wenn dieselben beiden Potenzen zu einer und derselben Wurzel der Einheit führten, so müßten

$$\frac{pk}{n}\text{ und }\frac{qk}{n}$$

entweder gleich sein oder sich um eine ganze Zahl unterscheiden, d. h.

$$(p-q)\cdot k$$

müßte durch n teilbar sein, was unmöglich ist, wenn p und q verschieden sind, und p, q, k sämtlich kleiner als n sind.

Hiernach stellen also, wenn n Primzahl ist,

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^4,\ \ldots\ \varepsilon^{n-1}$$

die sämtlichen n-ten Wurzeln der Einheit dar, wenn ε nur irgend eine von 1 verschiedene n-te Wurzel der Einheit ist.

Wenn ε eine von 1 verschiedene n-te Wurzel der Einheit, η eine ebensolche m-te Wurzel der Einheit ist, und wenn n und m Primzahlen sind, so erhält man die sämtlichen (n mal m)-ten Wurzeln der Einheit, wenn man jede der n Zahlen:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^4,\ \ldots\ \varepsilon^n$$

mit jeder der m Zahlen:

$$\eta,\ \eta^2,\ \eta^3,\ \eta^4,\ \ldots\ \eta^m$$

multipliziert. Denn, wenn n′ nicht größer als n ist und m′ nicht größer als m ist, so hat das Produkt:

$$\varepsilon^{n'} \cdot \eta^{m'}$$

die Eigenschaft, in die (n mal m)-te Potenz erhoben, die Zahl 1 zu ergeben. Zugleich erkennt man, daß man n mal m verschiedene Produkte erhält, von denen das letzte

$$\varepsilon^n \cdot \eta^m$$

die Zahl 1 selbst darstellt.

Wenn z. B. ε eine der oben genannten von 1 verschiedenen dritten Wurzeln der Einheit, η eine der oben genannten von 1 verschiedenen fünften Wurzeln der Einheit bedeutet, so sind:

$$\begin{gathered}\varepsilon\eta,\ \varepsilon\eta^2,\ \varepsilon\eta^3,\ \varepsilon\eta^4,\ \varepsilon\eta^5,\\ \varepsilon^2\eta,\ \varepsilon^2\eta^2,\ \varepsilon^2\eta^3,\ \varepsilon^2\eta^4,\ \varepsilon^2\eta^5,\\ \varepsilon^3\eta,\ \varepsilon^3\eta^2,\ \varepsilon^3\eta^3,\ \varepsilon^3\eta^4,\ \varepsilon^3\eta^5\end{gathered}$$

die sämtlichen 15 fünfzehnten Wurzeln der Einheit. Die in jeder dieser drei Zeilen zuletzt genannten drei Produkte sind die dritten Wurzeln der Einheit, weil $\eta^5 = 1$ ist, und die fünf Produkte der letzten Zeile sind die fünf n-ten Wurzeln der Einheit, weil $\varepsilon^3 = 1$ ist. Zu diesen sieben Produkten, nämlich:

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \eta,\ \eta^2,\ \eta^3,\ \eta^4$$

treten noch die folgenden acht Produkte hinzu:

$$\varepsilon\eta,\ \varepsilon\eta^2,\ \varepsilon\eta^3,\ \varepsilon\eta^4,\ \varepsilon^2\eta,\ \varepsilon^2\eta^2,\ \varepsilon^2\eta^3,\ \varepsilon^2\eta^4.$$

Übungen zu § 19.

Wie heißt der Modulus ρ und das Argument ϑ bei den Wurzeln der folgenden Gleichungen?

1) $x^2 = -i$; 2) $x^3 = 1 + i\sqrt{3}$; 3) $x^3 = -1 - i\sqrt{3}$;
4) $x^4 = -1$; 5) $x^5 = 243$; 6) $x^6 = -5 + 5i\sqrt{3}$; 7) $x^8 = 1$;
8) $x^{10} = +i$.

Wie heißt das größte Argument, das $< 360^0$ ist, bei den Wurzeln der folgenden Gleichungen?

9) $x^{20} = -1$; 10) $x^{15} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}$; 11) $x^{36} = -3{,}45$.

Zeichne durch Teilung eines Kreises die Wurzeln der folgenden Gleichungen:

12) $x^{16} = 1$; 13) $x^{12} = -1$; 14) $x^6 = 1 + i$;
15) $x^{12} = 64 + 64i\sqrt{3}$.

16) Stelle in Wurzelform $\cos 18^0$ und $\sin 18^0$ dar, und zwar durch algebraische Lösung der Gleichung $x^5 = -1$.

17) Berechne die zwölften Wurzeln der Einheit.

18) Berechne die sechzehnten Wurzeln der Einheit.

19) Eine 17-te Wurzel der Einheit ist ϑ, wie heißen die übrigen?

20) Eine p-te Wurzel der Einheit ist ε, eine q-te η, wo p und q Primzahlen sind, wie kann man dann die $(p \cdot q)$-ten Wurzeln der Einheit ausdrücken?

21) Wie kann man aus den fünfzehnten Wurzeln der Einheit die dreißigsten finden?

---

§ 20. Verknüpfung der komplexen Zahlen durch die Operationen dritter Stufe.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Schon im § 26 der „Elementaren Arithmetik“ (diese Sammlung, Band I) ist gezeigt, wie die Verknüpfung zweier komplexer Zahlen durch die Operationen erster und zweiter

Stufe immer wieder zu komplexen Zahlen führt, indem sich ergab:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i\cdot(b+d),$$
$$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i\cdot(b-d),$$
$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc),$$
$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Dem Permanenz-Prinzip getreu, haben wir noch zu untersuchen, ob die Verknüpfung zweier komplexer Zahlen durch eine der drei Operationen dritter Stufe wiederum zu komplexen Zahlen führt oder zu neuen Erweiterungen des Zahlengebiets Veranlassung gibt. (Vgl. „Elementare Arithmetik", §§ 9, 14, 25, 26).

Als Basis einer Potenz und als Radikandus einer Wurzel haben wir die komplexe Zahl schon im § 18 kennen gelernt, nur daß dort der Potenz-Exponent bezw. der Wurzel-Exponent als reelle Zahl vorausgesetzt wurde. Um auch den Exponenten einer Potenz oder einer Wurzel als komplexe Zahl auffassen zu können, setzen wir zunächst voraus, daß der Exponent eine rein imaginäre Zahl

$$ix$$

sei, und daß die Basis zunächst die bestimmte reelle Zahl e sei, die wir schon im § 9 als Grenzwert kennen gelernt haben, und die dann später im § 12 eine fundamentale Rolle gespielt hat. Da

$$e^{ix},$$

wo ix eine beliebige rein imaginäre Zahl ist, noch keinen Sinn hat, wohl aber erkannt ist, daß für jedes reelle x e^x gleich der im § 12 abgeleiteten Potenzreihe gesetzt werden kann, so liegt es nahe,

$$e^{ix}$$

durch diese Reihe zu definieren. Demgemäß setzen wir fest, daß e^{ix} gleich der Summe der Reihe ist, die entsteht, wenn man in der im § 12 abgeleiteten Potenzreihe für e^x ix statt x setzt. Es soll also sein:

$$e^{ix}=1+ix+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+\frac{i^4x^4}{4!}+\frac{i^5x^5}{5!}+\ldots$$

Wir ersetzen jetzt die Potenzen von i bezw. durch $+1$, $+i$, -1, $-i$, je nachdem der Exponent, durch 4 geteilt, den Rest 0, 1, 2, 3 läßt, und erhalten:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \cdots$$

Diese Reihe läßt sich nun in der Form $a + ib$ darstellen, und zwar dadurch, daß man die Glieder zusammenfaßt, die kein i enthalten, und andrerseits die, die i enthalten. So bekommt man:

$$e^{ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right] + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right].$$

Im § 16 ist aber erkannt, daß die Summe der Reihe in der ersten dieser beiden eckigen Klammern für jedes beliebige reelle x mit $\cos x$ identifiziert werden kann, und daß die Summe der Reihe in der zweiten Klammer ebenfalls für jedes beliebige reelle x mit $\sin x$ identifiziert werden kann, so daß wir erhalten, daß e^{ix} gleich einer komplexen Zahl ist, deren reeller Bestandteil $\cos x$ ist, während ihr rein imaginärer Bestandteil $i \cdot \sin x$ ist, oder daß für jedes beliebige x:

1) $$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

gesetzt werden darf. Der Modulus der rechts entstandenen komplexen Zahl ist 1, das Argument x. Multiplizieren wir beiderseits mit r, so erhalten wir:

2) $$r \cdot e^{ix} = r(\cos x + i \sin x).$$

Jede beliebige komplexe Zahl, deren Modulus r und deren Argument φ ist, kann also mit

$$r \cdot e^{i\varphi}$$

identifiziert werden. Die Einführung der lediglich mit l bezeichneten natürlichen Logarithmen (vgl. § 13) gestattet es uns,

$$r \text{ durch } e^{lr}$$

zu ersetzen, so daß wir erhalten:

3) $$e^{lr+i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bleibt ungeändert, wenn man φ um $2m\pi$ wachsen läßt, wo m ganzzahlig ist. Aus der linken Seite wird aber:

$$e^{lr+i\varphi+2im\pi}.$$

Nimmt man dann beiderseits den natürlichen Logarithmus, so erhält man rechts den natürlichen Logarithmus der beliebigen komplexen Zahl, die den Modulus r und das Argument φ hat, links aber erhält man:

$$lr + i\varphi + i \cdot 2m\varphi.$$

Wir haben also:

4) $$l[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = lr + i\varphi + 2im\pi.$$

Der natürliche Logarithmus einer komplexen Zahl (r, φ) hat also unzählig viele Werte, die man erhält, wenn man

$$lr + i\varphi$$

beliebig oft um $2i\pi$ wachsen oder abnehmen läßt. Diese unzählig vielen Werte bilden also eine arithmetische Reihe mit der konstanten Differenz $2i\pi$.

Insbesondere ergibt sich aus 4) für $r = 1$ und für $\varphi = \pi$,

$$\varphi = \frac{\pi}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{3},\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ \varphi = \frac{\pi}{6}$$

beziehungsweise:

a) $$l(-1) = i\pi + 2mi\pi = i\pi(2m + 1),$$

b) $$l(i) = i\frac{\pi}{2} + 2mi\pi = \frac{i\pi}{2}(4m + 1),$$

c) $$l\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = i\frac{\pi}{3} + 2mi\pi,$$

d) $$l\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = i\frac{\pi}{4} + 2mi\pi,$$

e) $$l\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = i\frac{\pi}{6} + 2mi\pi.$$

Bisher haben wir als Basis der besprochenen Potenzen und Logarithmen die besondere Zahl e betrachtet. Um allgemeiner zu finden, daß auch eine Potenzierung, bei der Basis und Exponent beide komplex sind, zu einer komplexen Zahl führt, haben wir den Ausdruck:

$$(a + ib)^{c+id}$$

zu untersuchen. Der Modulus der Basis $a + ib$ sei r, das Argument φ, so daß (§ 18):

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

gesetzt werden kann. Wir haben also den Ausdruck:

$$(re^{i\varphi})^{c+id}$$

zu prüfen. Da, wegen des Permanenz-Prinzips, die Rechenregeln der dritten Stufe bestehen bleiben müssen, auch wenn der Exponent nicht reell ist, so erhalten wir:

$$(re^{i\varphi})^{c+id} = r^{c+id} \cdot e^{i\varphi(c+id)}$$
$$= r^c \cdot r^{id} \cdot e^{ic\varphi} \cdot e^{-d\varphi} = r^c \cdot e^{id\ln r} \cdot e^{ic\varphi} \cdot e^{-d\varphi}$$
$$= r^c \cdot e^{-d\varphi} \cdot e^{i(d\ln r + c\varphi)}.$$

Wir erkennen also, daß die $(c + id)$-te Potenz der komplexen Zahl $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ wiederum eine komplexe Zahl ist, deren Modulus:

$$r^c e^{-d\varphi}$$

ist, und deren Argument:

$$d\ln r + c\varphi$$

ist. Nur muß dabei beachtet werden, daß die angegebene komplexe Zahl nur eine von unzählig vielen solchen Zahlen ist, die mit der $(c + id)$-ten Potenz von $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ identifiziert werden können. Da man nämlich φ um $2m\pi$ vermehren oder vermindern kann, wo m eine ganze Zahl ist, so erhält man allgemeiner:

$$r^c e^{-d(\varphi + 2m\pi)} \cdot e^{i[d\ln r + c(\varphi + 2m\pi)]}.$$

Beispielsweise berechnen wir:

$$i^i.$$

Die Basis i hat den Modulus $r = 1$, das Argument $\varphi = \frac{\pi}{2}$, im Exponenten i ist $c = 0$, $d = 1$. Also erhalten wir:

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2} - 2m\pi},$$

wo m eine positive oder negative ganze Zahl ist. Demnach ist i^i mit unzählig vielen reellen Zahlen zu identifizieren, von denen eine

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = 1 : e^{\frac{\pi}{2}}$$

ist, und von denen alle andern aus dieser durch eine geometrische Reihe hervorgehen, deren konstanter Quotient

$$e^{2\pi}$$

ist.

Daß auch die $(c + id)$-te Wurzel aus $a + ib$ unzählig viele komplexe Zahlen ergibt, folgt daraus, daß

$$\sqrt[v]{w} = w^{\frac{1}{v}}$$

ist, also die genannte Wurzel gleich der $\left(\frac{1}{c+id}\right)$-ten Potenz von $a + ib$ ist, und daß

$$\frac{1}{c+id} = \frac{c}{c^2+d^2} - i \cdot \frac{d}{c^2+d^2}$$

ist.

Was endlich den Logarithmus von $a + ib$ zur Basis $c + id$ ist, so läßt sich auch dieser unzählig vielen komplexen Zahlen gleichsetzen. Nach der im § 32 der „Elementaren Arithmetik" mit VI bezeichneten Formel ist nämlich:

$$\log(a + ib) \text{ zur Basis } c + id$$

gleich

$$\frac{l(a+ib)}{l(c+id)},$$

wo l den natürlichen Logarithmus bedeutet (hier § 14). Nun ist aber der natürliche Logarithmus einer komplexen Zahl schon oben ausgedrückt, nämlich:

$$l[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = lr + i\varphi + 2im\pi.$$

Wenn wir also Modulus und Argument von $a + ib$ r und φ nennen, sowie Modulus und Argument von $c + id$ r' und φ', so ergibt sich, daß

$$\log[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] \text{ zur Basis } r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$

gleich dem folgenden Quotienten ist:

$$\frac{lr + i(\varphi + 2m\pi)}{lr' + i(\varphi' + 2m'\pi)},$$

wo m und m' positive oder negative ganze Zahlen sind. Daß aber ein solcher Quotient zweier komplexer Zahlen eine komplexe Zahl ergibt, ist schon in der „Elementaren Arithmetik" (§ 26) erörtert.

Hiernach lautet also das Resultat unsrer Untersuchung:

Die Verknüpfung komplexer Zahlen durch die Operationen dritter Stufe führt immer wieder zu komplexen Zahlen, also nicht zu einer neuen Erweiterung des Zahlengebiets, nur daß im allgemeinen eine einzige solche Verknüpfung unendlich viele komplexe Zahlen ergibt.

Hiernach ist also die komplexe Zahl $a + ib$, wo a und b positive oder negative Zahlen bedeuten, die allgemeinste Zahlform, auf welche die Arithmetik der sieben Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung, Radizierung, Logarithmierung durch das Permanenz-Prinzip führen kann.

Übungen zu § 20.

Entwickele:

1) e^{-ix}; 2) $\frac{1}{2}(e^{+ix} + e^{-ix})$; 3) $\frac{1}{2}(e^{+ix} - e^{-ix})$.

Beweise die Identitäten:

4) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$; 5) $\sin x = \frac{1}{2} i (e^{-ix} - e^{+ix})$;

6) $\operatorname{tg} x = i \cdot \frac{1 - e^{2ix}}{1 + e^{2ix}}$; 7) $\operatorname{cotg} x = i \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1}$.

Welcher komplexen Zahl sind die folgenden Ausdrücke gleich, in dem a reell ist:

8) a^{ix}? 9) a^{x+iy}? 10) a^{x-iy}? 11) a^{-ix+iy}?

12) Beweise das im § 18 gefundene Resultat

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx$$

durch die hier gegebene Definition von e^{ix}.

13) Beweise die Identität:

$$2^m \cos^m x = e^{imx} + \frac{m}{1} e^{(m-2)ix} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} e^{(m-4)ix} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{(m-6)ix} + \ldots$$

14) Beweise mit Hilfe von 13):

$$2^m \cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x + \ldots$$

15) Beweise:

$$i\,\mathrm{tg}\, mx = \frac{(1+i\,\mathrm{tg}\, x)^m - (1-i\,\mathrm{tg}\, x)^m}{(1+i\,\mathrm{tg}\, x)^m + (1-i\,\mathrm{tg}\, x)^m}.$$

Benutze Nr. 15), um durch $\mathrm{tg}\, x$ und Binominalkoeffizienten auszudrücken:

16) $\mathrm{tg}\, 3x$; 17) $\mathrm{tg}\, 4x$; 18) $\mathrm{tg}\, 5x$; 19) $\mathrm{tg}\, 7x$.

20) Benutze 4) und 5), um $\cos(x+iy)$ und $\sin(x+iy)$ zu definieren.

21) Stelle (Nr. 20) $\mathrm{tg}(x+iy)$ und $\mathrm{cotg}(x+iy)$ in der Form $a+ib$ dar.

22) Wenn x selbst reell ist, so ist $\cos ix$ immer reell und $\sin ix$ immer rein imaginär. Warum?

Berechne:

23) $\cos i$; 24) $\sin i$; 25) $\sec i\sqrt{2}$; 26) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - i\right)$;

27) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\pi\right)$; 28) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{4}\right)$.

29) Benutze 20), um zu zeigen, daß die für $\sin(u+v)$, $\sin(u-v)$, $\cos(u+v)$, $\cos(u-v)$ in der Trigonometrie bewiesenen Formeln auch gültig sind, wenn u und v komplexe Zahlen sind.

Beweise die Formeln:

30) $\mathrm{arctg}\, ic = \frac{1}{2} i\, l\frac{1+c}{1-c}$ für $c^2 < 1$, wo l das Zeichen für den natürlichen Logarithmus ist;

31) $\mathrm{arctg}\, ic = \frac{1}{2} i\, l\frac{c+1}{c-1}$ für $c^2 > 1$.

Schreibe als komplexe Zahl in der Form $a+ib$ dar:

32) $l(-i)$; 33) $l(1+i)$; 34) $l(3-4i)$; 35) $l(-1-i\sqrt{3})$.

Stelle als komplexe Zahl dar:

36) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)^{1+i}$; 37) $(re^{i\varphi})^{c-id}$.

Berechne:

38) $\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{i}$; 39) $\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-2i}$; 40) $(-1)^{i}$;

41) i^{2i}; 42) $i^{i\sqrt{2}}$; 43) $i^{-i\sqrt{3}}$; 44) $\sqrt[i]{1-i}$; 45) $\sqrt[1+i]{1-i}$.

Drücke als Quotient zweier komplexer Zahlen aus:

46) $\log(3-3i)$ zur Basis $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$;

47) $\log\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ zur Basis $(1-i\sqrt{3})$.

48) Schreibe als komplexe Zahl: $\log(1-i)$ zur Basis $(1+i)$.

49) Schreibe mit Benutzung des Buchstabens m, der jede beliebige ganze Zahl bedeuten soll, die unzählig vielen komplexen Zahlen, die gleich $(1+i)^{i}$ gesetzt werden können.

Beweise:

50) $l1 = 2m\pi\cdot i$; 51) $l(-1) = (2m+1)\pi\cdot i$;

52) $l(i) = \left(\frac{\pi}{2}+2m\pi\right)i$;

53) $1^{i} = e^{-2m\pi}$; 54) $\sqrt[i]{i} = e^{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{2m\pi}$;

55) $l(a+ib) = \frac{1}{2}l(a^2+b^2)+i\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}+2m\pi\right)$, wenn $a>0$ ist;

56) $l(a+ib) = \frac{1}{2}l(a^2+b^2)+i\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}+2m\pi+\pi\right)$, wenn $a<0$ ist.

57) Die unzählig vielen Werte, die man gleich $\log(re^{i\vartheta})$ zur Basis $r'e^{i\vartheta'}$ setzen kann, erhält man, wenn man aus den beiden Gleichungen $v\cdot lr' - (\vartheta'+2k'\pi)\cdot w = lr$ und $w\cdot lr' + (\vartheta'+2k'\pi)\cdot v = \vartheta+2k\pi$ die Größe v und w berechnet, und jedes so resultierende Wertepaar zu einer komplexen Zahl $v+iw$ zusammenfaßt. Beweise dies.

§ 21. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen.

Schon im § 3 haben wir den Ausdruck

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots a_n,$$

wo x veränderlich ist, a_1, a_2, a_3, ... a_n aber konstant sind, als eine ganze Funktion von x bezeichnet. Setzt man für x irgend einen Wert ein, so ergibt sich ein ganz bestimmter Funktionswert y. Ist insbesondere $y = 0$, so nennt man die entstehende Gleichung eine algebraische, und es erwächst dann die Aufgabe, die algebraische Gleichung zu lösen, d. h. diejenigen Werte von x zu bestimmen, durch deren Einsetzung die Gleichung erfüllt wird, oder, was dasselbe ist, die Veränderliche x so zu bestimmen, daß der Wert der ganzen Funktion Null wird. Wir werden sehen, daß es immer n solcher Werte von x gibt, wenn n der Grad der Funktion ist, oder, was dasselbe ist, daß eine Gleichung n-ten Grades n Wurzeln hat. Um dieses zu beweisen, bedarf man freilich eines Satzes, der zuerst von Gauss auf mehrfache Weise bewiesen ist, dessen Beweis aber höhere mathematische Mittel benutzt, als die sind, die der „Niederen Analysis" zu Gebote stehen. Dieser Satz, den man den „Gaussischen Fundamentalsatz der Algebra" nennt, spricht aus, daß jede algebraische Gleichung mindestens eine Wurzel haben muß, oder, was dasselbe ist, daß es immer mindestens einen Wert von x geben muß, durch dessen Einsetzung eine ganze Funktion von x Null werden muß. Dabei ist zu beachten, daß dieser Wert nicht reell zu sein braucht, sondern auch eine komplexe Zahl (§ 18):

$$a + ib$$

sein kann, in der b von Null verschieden ist, selbst wenn die n Konstanten:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

alle reell sind. Wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist, sollen diese n Konstanten immer als reelle Zahlen vorausgesetzt werden.

Daß eine Gleichung n-ten Grades genau n Wurzeln haben muß, kann man auf folgende Weise leicht beweisen.

Nach dem Gaussischen Fundamentalsatz muß es einen Wert von x geben, für welchen in

$$1) \qquad y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

$y = 0$ werden muß. Bezeichnen wir diesen Wert von x mit x_1, so soll also sein:

$$2) \quad 0 = x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + a_2 x_1^{n-2} + a_3 x_1^{n-3} + \ldots a_{n-1} x_1 + a_n.$$

Durch Subtraktion der Gleichung 2) von 1) ergibt sich:

$$3) \quad y = (x^n - x_1^n) + a_1 (x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2 (x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1).$$

Jede der in 3) vorkommenden Klammern ist nun durch $x - x_1$ teilbar, da, nach § 15 der „Elementaren Arithmetik“

$$x^p - x_1^p = (x - x_1)\left(x^{p-1} + x^{p-2} \cdot x_1 + \ldots x_1^{p-1}\right)$$

sein muß. Deshalb können wir aus der rechten Seite von 3) die Differenz $x - x_1$ absondern. Der dann als Faktor von $x - x_1$ entstehende Ausdruck ist dann wieder eine ganze Funktion von x, aber nur vom Grade $n - 1$, weil der höchste in ihr vorkommende Exponent von x $n - 1$ ist. Also kommt aus 3):

$$y = (x - x_1)[x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \ldots b_{n-1}],$$

wo die neuen Konstanten $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$ sich irgendwie aus den Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ zusammensetzen. Nach dem Gaussischen Fundamentalsatz muß es nun wieder mindestens einen Wert von x geben, für den die in eckige Klammer gesetzte ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades Null wird. Dieser Wert von x sei x_2, so daß

$$0 = (x - x_1)[x_2^{n-1} + b_1 x_2^{n-2} + b_2 x_2^{n-3} + \ldots + b_{n-1}]$$

wird. Wenn wir nun wieder mit x_2 so verfahren, wie oben mit x_1 verfahren ist, erhalten wir:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)(x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + c_2 x^{n-4} + \ldots c_{n-2}].$$

Der nächste, wieder ebenso zu machende Schritt führt uns dann zu:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)[x^{n-3} + d_1 x^{n-4} + \ldots d_{n-3}].$$

So kann man beliebig fortfahren, und, da der Grad der entstehenden ganzen Funktion immer um 1 kleiner wird, so muß schließlich kommen:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})[x^1 + k],$$

und, wenn mit x_n der Wert von x bezeichnet wird, der $x^1 + k$ zu Null macht, erhält man:

4) $$y = (x - x_1)(-x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

Dieses Resultat lautet in Worten:

Eine ganze Funktion n-ten Grades ist gleich dem Produkte von n Differenzen, welche sämtlich den Minuendus x haben und als Subtrahendus n Zahlen haben, welche, für x eingesetzt, verursachen, daß die ganze Funktion den Funktionswert Null bekommt.

Hiermit ist zugleich bewiesen, daß eine Gleichung n-ten Grades n Wurzeln hat. Daß sie nicht mehr haben kann, folgt daraus, daß die ganze Funktion, die durch sie gleich Null gesetzt ist, sonst von höherem als dem n-ten Grade werden würde.

Die Gleichung 4) läßt zugleich den Zusammenhang erkennen, der zwischen den n Koeffizienten

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

einer Gleichung n-ten Grades:

$$0 = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

und ihren n Wurzeln:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

besteht. Wenn man nämlich auf der rechten Seite von 4) nacheinander die Klammern löst, so erhält man zuerst:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2,\end{aligned}$$

dann:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= x^3 - x^2(x_1 + x_2) + x x_1 x_2 - x^2 x_3 \\ &\quad - (x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3 = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 \\ &\quad + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3.\end{aligned}$$

In derselben Weise erhält man hieraus:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = x^4-(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3 + (x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2 - (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x+x_1x_2x_3x_4$$

u. s. w.

Wenn nun also, der Kürze wegen,

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n \text{ mit } f_1$$
$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n \text{ mit } f_2$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n \text{ mit } f_3$$

u. s. w.

bezeichnet, so ist:

$$a_1=-f_1,\ a_2=+f_2,\ a_3=-f_3,\ldots$$
$$\text{bis } a_n=(-1)^n f_n.$$

In Worten lautet dieses Resultat:

Der erste Koeffizient a_1 einer Gleichung n-ten Grades ist gleich der negativen Summe aller n Wurzeln, der zweite Koeffizient a_2 ist gleich der positiven Summe der Produkte von je zwei der n Wurzeln, der dritte Koeffizient a_3 ist gleich der negativen Summe der Produkte von je drei der n Wurzeln, u. s. w., so daß der n-te Koeffizient a_n gleich dem positiven oder negativen Produkt aller n Wurzeln ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Dabei ist immer vorausgesetzt, daß die eine Seite der Gleichung Null ist, und daß der Koeffizient von x^n gleich 1 ist.

Hiernach kann man leicht die zur Lösung einer Gleichung umgekehrte Aufgabe lösen, die darin besteht, die Koeffizienten und damit die Gleichung selbst anzugeben, wenn ihre sämtlichen Wurzeln gegeben sind. Hierfür einige Beispiele:

1) Wie heißt in der eingerichteten Form diejenige Gleichung, deren Wurzeln 3, 4, $\frac{1}{2}$ heißen? Es ergibt sich $a_1=-\left(3+4+\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{2}$; $a_2=+\left(3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}+12\right)=\frac{31}{5}$; $a_3=-3\cdot4\cdot\frac{1}{2}=-6$, so daß die Gleichung selbst heißt:

$$x^3-\frac{15}{2}x^2+\frac{31}{2}x-6=0.$$

2) Wenn die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades 1, 3, 4, -8 sind, so ergibt sich:

$$a_1 = -(1+3+4-8) = 0;$$
$$a_2 = +(1\cdot 3+1\cdot 4-1\cdot 8+3\cdot 4-3\cdot 8-4\cdot 8)$$
$$= +(3+4-8+12-24-32) = 19-64 = -45;$$
$$a_3 = -(1\cdot 3\cdot 4-1\cdot 3\cdot 8-1\cdot 4\cdot 8-3\cdot 4\cdot 8)$$
$$= -(12-24-32-96) = -(-140) = +140;$$
$$a_4 = +[1\cdot 3\cdot 4\cdot(-8)] = -96;$$

so daß also die gesuchte Gleichung:

$$x^4 - 45x^2 + 140x - 96 = 0$$

lautet.

3) Die Wurzeln einer Gleichung seien

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3};$$

so ergibt sich für ihre Koeffizienten:

$$a_1 = -\left(0+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = -2;$$

$$a_2 = +\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}+\frac{1}{4}-i^2\cdot\frac{3}{4}\right)$$
$$= +\left(1+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = +2;$$

$$a_3 = -1\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}\right) = -\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = -1;$$

$$a_4 = 0.$$

Die Gleichung selbst lautet also:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x = 0.$$

3) Von einer Gleichung sechsten Grades seien drei Wurzeln gleich $+\frac{1}{3}$, drei gleich $-\frac{1}{3}$. Wie heißt die Gleichung in solcher Form, daß rechts und links nur positive Glieder stehen, und die Koeffizienten ganzzahlig sind? Man erhält: $\left(x-\frac{1}{3}\right)^3\left(x+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(x^2-\frac{1}{9}\right)^3 = 0$.

Daher:

$$x^6 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^2}{27} - \frac{1}{729} = 0,$$

woraus man die gewünschte Form erhält, nämlich:

$$729\,x^6 + 27\,x^2 = 243\,x^4 + 1.$$

6) Eine Gleichung, welche die fünf Wurzeln:

$$1 + i\sqrt{2},\ 1 - i\sqrt{2},\ 2 + i\sqrt{3},\ 2 - i\sqrt{3},\ -6$$

besitzt, muß in der eingerichteten Form lauten:

$$x^5 - 18\,x^3 + 82\,x^2 - 135\,x + 126 = 0.$$

Daß eine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten sämtlich reell sind, auch komplexe Wurzeln haben kann, zeigen die obigen Beispiele. Doch läßt sich beweisen, daß solche komplexe Wurzeln immer paarweise vorkommen müssen, indem, wenn $a + ib$ eine Wurzel der Gleichung ist, auch die zu $a + ib$ konjugiert-komplexe Zahl $a - ib$ eine Wurzel sein muß. Um dieses zu beweisen, nehmen wir an, daß r der Modulus, φ das Argument einer komplexen Zahl sei, welche die Gleichung:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

erfüllt. Wir haben dann zu beweisen, daß sie auch durch eine komplexe Zahl erfüllt wird, deren Modulus r und deren Argument $-\varphi$ ist. Nach der Voraussetzung erhält man bei Anwendung der in § 18 bewiesenen Moivreschen Formel:

$$r^n[\cos n\varphi + i \sin n\varphi] + a_1 r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi] + \ldots + a_{n-1} r[\cos\varphi + i \sin\varphi] + a_n = 0.$$

Da nun nach § 18 sowohl die Summe der nicht mit i multiplizierten Produkte Null sein muß, als auch die Summe der mit i multiplizierten Produkte, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$r^n \cos n\varphi + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2} \cos(n-2)\varphi + \ldots + a_n = 0$$

und:

$$r^n \sin n\varphi + a_1 r^{n-1} \sin(n-1)\varphi + a_2 r^{n-2} \sin(n-2)\varphi + \ldots a_{n-1} r \sin\varphi = 0.$$

Wenn wir jetzt die zweite dieser beiden Gleichungen mit i multiplizieren und dann von der ersten subtrahieren, erhalten wir:

$$r^n[\cos n\varphi - i\sin n\varphi] + a_1 r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi - i\sin(n-1)\varphi] + \ldots + a_{n-1} r[\cos\varphi - i\sin\varphi] + a_n = 0.$$

Diese Gleichung zeigt aber, daß die Einsetzung der konjugiert komplexen Zahl

$$r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

die vorliegende algebraische Gleichung richtig macht. Eine komplexe Zahl kann also nur dann Wurzel einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten sein, wenn es auch die konjugiert-komplexe Zahl ist.

Übungen zu § 21.

1) Jemand erkennt, daß eine Funktion dritten Grades durch $x-2$, $x-5$ und $x+7$ teilbar ist. Für welche Werte von x wird die ganze Funktion zu Null?

Wie heißt eine Gleichung, deren rechte Seite Null ist, und bei der der Koeffizient der höchsten Potenz von x eins ist, falls ihre Wurzeln heißen:

2) 3 und -4; 3) 1, 5, -6; 4) 4, -2, $+3$, -9;

5) 1, 2, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, 0; 6) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$; 7) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$;

8) $1+i$, $1-i$; 9) $1+i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$, 8;

10) dreimal 1 und viermal -1; 11) $1+i$, $1-i$ und viermal 0.

12) Eine Gleichung sechsten Grades hat drei Wurzeln, die die negativen Werte der übrigen drei Wurzeln sind, wie heißt in ihr der Koeffizient von x^5?

13) Eine Gleichung achten Grades hat vier Wurzeln, welche die reziproken Werte der übrigen vier Wurzeln sind, wie heißt in ihr das von x freie Glied?

14) Eine Gleichung vierten Grades hat zwei Wurzeln, die beziehungsweise $2-i$ und $3+2i$ heißen. a) Wie heißen die beiden andern Wurzeln, falls die Koeffizienten reell sind; b) wie heißt die Gleichung?

15) Eine Gleichung sechsten Grades hat zweimal die Wurzel $+1$ und zweimal die Wurzel $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Wie heißt die Gleichung, falls ihre Koeffizienten reell sind?

---

§ 22. Lösung der Gleichung dritten Grades.

I) Wenn $x^3+ax+b=0$ ist, und $D=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3 \geqq 0$,

sowie: $v=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{D}}$ und $w=\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{D}}$ ist,

so ist $x_1=v+w$; $x_2=-\frac{1}{2}(v+w)+\frac{1}{2}i\sqrt{3}(v+w)$;

$$x_3=-\frac{1}{2}(v+w)-\frac{1}{2}i\sqrt{3}(v+w).$$

II) Wenn aber bei $x^3+ax+b=0$, $D=\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3 \leqq 0$ ist,

so ist: $x_1=2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cdot\cos\frac{\vartheta}{3}$; $x_2=2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\vartheta}{3}+120^0\right)$;

$x_3=2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cdot\cos\left(\frac{\vartheta}{3}+240^0\right)$; falls $\cos\vartheta=\frac{-\frac{b}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3}$ ist.

III) $x^3+cx^2+dx+e=0$ wird durch $x=y-\frac{c}{3}$ zu:

$$y^3+\left(d-\frac{c^2}{3}\right)y+\left(e-\frac{dc}{3}+\frac{2c^3}{27}\right)=0.$$

Wenn man, im Sinne der „Elementaren Arithmetik“, aus $x^3=8$ lediglich $x=\sqrt[3]{8}=2$ schließt, so hat man das Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ als eindeutig betrachtet. Wenn man jedoch aus

$x^3 = 8$ im Sinne des § 19 dieser „Niederen Analysis“ schließt:

$$x = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ oder } 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

oder

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) = -1 - i\sqrt{3},$$

so hat man das Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ als dreideutig aufgefaßt. Hier soll nun aber dieses Zeichen immer als eindeutig betrachtet werden. Demnach hat die binomische Gleichung dritten Grades

$$x^3 = A,$$

wo A reell ist, drei Wurzeln, nämlich:

$$x_1 = \sqrt[3]{A}; \; x_2 = \sqrt[3]{A} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right); \; x_3 = \sqrt[3]{A}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right).$$

Da nämlich nach § 19 die Zahlen

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3} \text{ und } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}, \text{ ebenso wie } 1,$$

die Eigenschaft haben, in die dritte Potenz erhoben, die Zahl 1 zu ergeben, so hat auch jede der beiden Zahlen

$$\sqrt[3]{A} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) \text{ und } \sqrt[3]{A} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right),$$

die Eigenschaft, in die dritte Potenz erhoben, die Zahl A zu ergeben, ist also eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 = A.$$

Aus den im § 19 behandelten Eigenschaften der Wurzeln der Einheit, geht hervor, daß, wenn man eine der beiden nichtreellen dritten Wurzeln der Einheit ε nennt, jede Potenz von ε wiederum eine dritte Wurzel der Einheit ergibt, und daß insbesondere ε^2 gleich der andern nichtreellen dritten Wurzel der Einheit ist. Wir werden demgemäß im folgenden immer

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3} \text{ mit } \varepsilon \text{ und } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3} \text{ mit } \varepsilon^2$$

bezeichnen.

Eine Gleichung heißt dritten Grades, wenn sie sich auf die Form:

$$x^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

bringen läßt, wo x die gesuchte Unbekannte, c, d, e bekannte Zahlen sind, die wir, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt ist, als reell betrachten wollen. Wenn von den bekannten Zahlen c, d, e, die man die Koeffizienten der Gleichung dritten Grades nennt, c und d beide Null sind, so hat die Gleichung nach dem Obigen die drei Wurzeln:

$$x_1 = \sqrt[3]{-e}; \quad x_2 = \sqrt[3]{-e} \cdot \varepsilon; \quad x_3 = \sqrt[3]{-e} \cdot \varepsilon^2.$$

Wenn von den Koeffizienten c, d, e nur c Null ist, also d und e nicht Null zu sein brauchen, so läßt sich die Unbekannte x durch die Koeffizienten d und e ausdrücken, wie aus dem folgenden hervorgeht.

Um aus

1) $$x^3 + ax + b = 0$$

zu finden, in welcher Weise x von a und b abhängt, setzen wir

$$x = v + w.$$

Durch Einsetzen erhalten wir dann:

$$v^3 + 3v^2w + 3vw^2 + w^3 + a(v + w) + b = 0$$

oder:

$$[v^3 + w^3 + b] + 3vw(v + w) + a(v + w) = 0$$

oder:

2) $$[v^3 + w^3 + b] + (3vw + a)(v + w) = 0.$$

Wir haben durch das Einsetzen von $x = v + w$ zwei neue Unbekannte eingeführt. Wir haben daher noch die Freiheit, über v und w zweckmäßig zu verfügen, und verfügen so, daß

$$3vw + a$$

Null werden soll. Um dann die Gleichung 2) befriedigen zu können, muß auch

$$v^3 + w^3 + b = 0.$$

Somit haben wir das Problem der Lösung der Gleichung 1) durch die Substitution $x = v + w$ auf das Problem zurückgeführt, v und w aus dem folgenden Gleichungssystem zu bestimmen:

$$\begin{cases} 3vw + a = 0 \\ v^3 + w^3 + b = 0 \end{cases}$$

oder aus:

$$\left.\begin{aligned} 3)\quad & v \cdot w = -\frac{a}{3} \\ 4)\quad & v^3 + w^3 = -b \end{aligned}\right\}$$

Man kennt also von den gesuchten Unbekannten das Produkt und die Summe ihrer dritten Potenzen. Dadurch, daß wir das Produkt mit 3 potenzieren, gewinnen wir von den dritten Potenzen der Unbekannten Summe und Produkt, können also diese dritten Potenzen nach § 28 der „Elementaren Arithmetik" durch eine Gleichung zweiten Grades bestimmen. Aus den dritten Potenzen können wir dann auch die Unbekannten selbst berechnen, nur daß wir dabei zu beachten haben, daß nicht jedes Wertepaar, das die Gleichung:

$$(v \cdot w)^3 = \left(-\frac{a}{3}\right)^3$$

erfüllt, notwendig auch die Gleichung:

$$v \cdot w = -\frac{a}{3}$$

befriedigen muß.

Indem wir nun das vierfache Produkt von

$$(v \cdot w)^3 = v^3 \cdot w^3 = -\frac{a^3}{27}$$

von dem Quadrat der Gleichung $v^3 + w^3 = -b$ subtrahieren, erhalten wir das Quadrat der Differenz von v^3 und w^3, nämlich:

$$\begin{aligned}(v^3 - w^3)^2 &= (v^3 + w^3)^2 - 4 \cdot v^3 \cdot w^3 \\ &= b^2 - 4 \cdot \left(-\frac{a^3}{27}\right) = b^2 + \frac{4a^3}{27}.\end{aligned}$$

Daher kommt:

$$v^3 - w^3 = \pm \sqrt{b^2 + \frac{4a^3}{27}}$$

oder:

$$5)\qquad \frac{v^3 - w^3}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Verbindet man nun 5) mit der Hälfte von 4) durch Addition und Subtraktion, erhält man:

6) $$v^3 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

und:

7) $$w^3 = -\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck heißt die Diskriminante der Gleichung.

Wenn wir nun voraussetzen, daß außer a und b, auch die Diskriminante:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = D \gtreqless 0$$

ist, stellen die Gleichungen 6) und 7) zwei binomische Gleichungen dritten Grades dar, wie sie oben behandelt sind. Jede von ihnen ergibt also drei Wurzeln, nämlich:

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}}, \quad v_2 = \varepsilon \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}},$$

$$v_3 = \varepsilon^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}};$$

$$w_1 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{D}}, \quad w_2 = \varepsilon \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{D}},$$

$$w_3 = \varepsilon^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{D}}.$$

Jede Zusammenfassung eines der Werte von v mit irgend einem der Werte von w erfüllt nunmehr die Gleichung $v^3 + w^3 = -b$, wenn wir dafür sorgen, daß nur solche Werte von v und w zusammengefaßt werden, in denen vor $\sqrt{D}$ entgegengesetzte Vorzeichen stehen. Auch erfüllt jede solche Zusammenfassung die Gleichung $v^3 \cdot w^3 = -\frac{a^3}{27}$, da ja dann immer

$$-\frac{b}{2} + \sqrt{D} \text{ mit } -\frac{b}{2} - \sqrt{D}$$

zu multiplizieren ist, was ergibt:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3\right] = -\left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Wir haben aber nicht die Gleichung $v^3 \cdot w^3 = -\frac{a^3}{27}$ zu erfüllen, sondern die oben mit 3) bezeichnete Gleichung $v \cdot w = -\frac{a}{3}$. Wir dürfen daher von den obigen neun Zusammenfassungen nur solche auswählen, bei denen $v \cdot w = -\frac{a}{3}$ kommt. Es paßt daher für die Lösung der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ nur zusammen:

erstens: v_1 mit w_1;
zweitens: v_2 mit w_3, weil $\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^3 = 1$ ist;
drittens: v_3 mit w_2, weil $\varepsilon^2 \cdot \varepsilon = \varepsilon^3 = 1$ ist.

Wenn wir also, bei Festhaltung der oben gemachten Voraussetzung $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = D \gtrless 0$:

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{D}} \text{ mit } v \text{ und } \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{D}} \text{ mit } w$$

bezeichnen, so ergeben sich für die Lösung der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ die drei Wurzeln:

8) $$x_1 = v + w; \quad x_2 = \varepsilon v + \varepsilon^2 w; \quad x_3 = \varepsilon^2 v + \varepsilon w.$$

Da die dritte Wurzel der Einheit: $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}$ ist, und die andere komplexe dritte Wurzel der Einheit $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\sqrt{3}$ ist, so kann man x_2 und x_3 auch in folgender Gestalt schreiben:

9) $$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) v + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) w$$
$$= -\frac{1}{2}(v + w) + \frac{1}{2} i\sqrt{3}(v - w);$$
$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) v + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}\right) w$$
$$= -\frac{1}{2}(v + w) - \frac{1}{2} i\sqrt{3}(v - w).$$

Beispiele:

1) $x^3 + 133 = 30x$ ergibt die geordnete Form:

$x^3 - 30x + 133 = 0$, so daß $a = -30$, $b = +133$

zu setzen ist. Es ergibt sich nacheinander:

$$D = \left(\frac{133}{2}\right)^2 + \left(\frac{-30}{3}\right)^3 = \frac{17689}{4} - 1000$$

$$= \frac{13689}{4}; \quad \sqrt{D} = \frac{117}{2};$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{133}{2} + \frac{117}{2}} = \sqrt[3]{-8} = -2;$$

$$w = \sqrt[3]{-\frac{133}{2} - \frac{117}{2}} = \sqrt[3]{-125} = -5;$$

also:

$$x_1 = -2 - 5 = -7; \quad x_2 = +\frac{7}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3} \cdot 3 = +\frac{7}{2}$$

$$+\frac{3}{2} i\sqrt{3}; \quad x_3 = +\frac{7}{2} - \frac{3}{2} i\sqrt{3}.$$

2) $24x^3 = 4x + 1$ oder, eingerichtet:

$$x^3 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{24} = 0, \text{ so daß } a = -\frac{1}{6}, \; b = -\frac{1}{24}$$

zu setzen ist. Wir erhalten nacheinander:

$$D = \left(\frac{1}{48}\right)^2 + \left(-\frac{1}{18}\right)^3 = \frac{1}{48^2} - \frac{1}{18^3} = \frac{1}{2^8 \cdot 3^2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^6}$$

$$= \frac{3^4 - 2^5}{2^8 \cdot 3^6} = \frac{81 - 32}{2^8 \cdot 3^6} = \frac{49}{2^8 \cdot 3^6}; \text{ also } \sqrt{D} = \frac{7}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{7}{432};$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{1}{48} + \frac{7}{432}} = \sqrt[3]{\frac{9+7}{432}} = \sqrt[3]{\frac{8}{216}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3};$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{1}{48} - \frac{7}{432}} = \sqrt[3]{\frac{9-7}{432}} = \sqrt[3]{\frac{1}{216}} = \frac{1}{6};$$

daher:

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} i \sqrt{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} i \sqrt{3};$$

$$x_3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{12} i \sqrt{3}.$$

3) $x^3 = 18(x + 6)$ oder, eingerichtet:

$x^3 - 18x - 108 = 0$, so daß $a = -18$, $b = -108$ zu setzen ist. Es ergibt sich:

$D = 54^2 + (-6)^3 = 2916 - 216 = 2700$, also $\sqrt{D} = 30 \cdot \sqrt{3}$; so daß man erhält:

$$v = \sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} = 4{,}732; \quad w = \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}} = 1{,}268;$$

daher:

$$x_1 = 4{,}732 + 1{,}268 = 6; \quad x_2 = -3 + \frac{1}{2} i \sqrt{3} \cdot 3{,}464$$

$$= -3 + \frac{1}{2} i \cdot 1{,}732 \cdot 3{,}464 = -3 + \frac{1}{2} i \cdot 6$$

$$= -3 + 3i; \quad x_3 = -3 - 3i.$$

4) $4x^2 = 13 : x + 9$ oder:

$4x^3 = 13 + 9x$ oder: $x^3 - \frac{9}{4}x - \frac{13}{4} = 0$; $a = -\frac{9}{4}$, $b = -\frac{13}{4}$; daher:

$$D = \left(\frac{13}{8}\right)^2 - \frac{27}{64} = \frac{142}{6}; \text{ also } \sqrt{D} = \frac{1}{8}\sqrt{142};$$

so daß man erhält:

$$v = \sqrt[3]{\frac{13}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{142}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{13 + \sqrt{142}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{13 + 11{,}92}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{24{,}92} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}92 = 1{,}46; \quad w = \frac{1}{2}\sqrt[3]{13 - 11{,}92}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{1{,}08} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}03 = 0{,}51;$$

daher:

$$x_1 = v + w = 1{,}97; \quad x_2 = -0{,}99 + \frac{1}{2} i \sqrt{3} \cdot 0{,}95$$

$$= -0{,}99 + \frac{1}{2} i \cdot 1{,}73 \cdot 0{,}95 = -0{,}99 + 0{,}82 \cdot i;$$

$$x_3 = -0{,}99 - 0{,}82 \cdot i.$$

In den ersten beiden dieser vier Beispiele wurde jede der beiden Zahlen v und w rational. In dem vierten Beispiele wnrden zwar v und w irrational, ihre Summe aber rational. Häufig kann man in diesem Falle die rationale Summe erkennen, ohne die vorkommenden Irrationalzahlen numerisch ausrechnen zu müssen. Im obigen dritten Beispiele ergab sich z. B.:

$$v = \sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}}.$$

Wenn man nun vermutet, daß $\sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} = f + g\sqrt{3}$ ist, wo f und g rational sind, so kann man ansetzen:

$$(f + g\sqrt{3})^3 = f^3 + 3f^2 g\sqrt{3} + 9fg^2 + 3g^3\sqrt{3} = 54 + 30\sqrt{3},$$

woraus man dann schließen kann:

$$\begin{cases} f^3 + 9fg^2 = 54 \\ 3f^2 g + 3g^3 = 30, \end{cases}$$

woraus man raten kann:

$$f = 3 \text{ und } g = 1,$$

so daß $v = 3 + \sqrt{3}$ ist, und deshalb $w = 3 - \sqrt{3}$ ist. Dann folgt:

$$x_1 = v + w = (3 + \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3}) = 6; \quad x_2 = -\frac{1}{2}(v + w)$$

$$+ \frac{1}{2} i \sqrt{3}\,(v - w) = -3 + \frac{1}{2} i \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$$

$$= -3 + 3i, \text{ also } x_3 = -3 - 3i.$$

Wollte man dieses Raten methodisch gestalten, so würde man wieder eine Gleichung dritten Grades lösen müssen, um f und g zu bestimmen.

Oben ist die Voraussetzung gemacht, daß nicht allein a und b, sondern auch $\sqrt{D}$ reell ist, was ja nur der Fall ist, wenn D nicht negativ ist. Ist $D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ insbesondere gleich Null, so ergibt sich $v = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$ und $w = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$, also:

$$x_1 = -\sqrt[3]{+\frac{b}{2}} - \sqrt[3]{+\frac{b}{2}} = -2\sqrt[3]{+\frac{b}{2}};$$

$$x_2 = +\sqrt[3]{\frac{b}{2}};$$

$$x_3 = +\sqrt[3]{\frac{b}{2}}.$$

Also gilt der Satz:

Wenn in der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ a und b reell sind und der Ausdruck:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

Null wird, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind, und gleich der negativen Hälfte der dritten Wurzel sind. Z. B.:

$x^3 - 12x - 16 = 0$ ergibt:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}} = 2\sqrt[3]{8} = 4; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = -2.$$

Wenn aber $D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ eine positive Zahl ergibt, so erhalten wir, wie wir oben gesehen haben, für $x_1 = v + w$ eine reelle Wurzel, dagegen für $x_2 = -\frac{1}{2}(v + w) + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(v - w)$ und für $x_3 = -\frac{1}{2}(v + w) - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(v - w)$ zwei konjugiert-komplexe Wurzeln, d. h. solche, die sich nur durch das

Vorzeichen vor i unterscheiden. Wir können also den Satz aussprechen:

Wenn in der Gleichung $x^2+ax+b=0$ a und b reell sind und der Ausdruck:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

positiv, d. h. größer als Null wird, so hat die Gleichung eine reelle und zwei nichtreelle Wurzeln, und die beiden letzteren sind konjugiert-komplex. (Man vgl. die obigen vier Beispiele.)

Oben sind immer bei jeder Gleichung dritten Grades alle drei Wurzeln aus den für v und w gefundenen Werten berechnet. Es reicht jedoch aus, wenn man auf solche Weise nur eine einzige Wurzel, etwa x_1, bestimmt. Dann muß ja die ganze Funktion, die in der Gleichung gleich Null gesetzt ist, durch $x-x_1$ teilbar sein, wie in § 21 besprochen ist. Die durch die Division erhaltene Funktion zweiten Grades ist dann gleich Null zu setzen, und die so erhaltene Gleichung zweiten Grades ist dann zu lösen. Ihre Wurzeln sind die beiden andern Wurzeln der Gleichung dritten Grades. So konnte in dem zweiten von den oben besprochenen vier Beispielen, nachdem $x_1=\frac{1}{2}$ berechnet war, x_2 und x_3 dadurch berechnet werden, daß man:

$$x^3-\frac{1}{6}x-\frac{1}{24} \text{ durch } x-\frac{1}{2} \text{ dividierte.}$$

Man erhält als Quotient $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}$. Diesen Ausdruck hat man gleich Null zu setzen. Die Wurzeln der so entstandenen quadratischen Gleichung:

$$-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{12}}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{-3}{144}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{12}i\sqrt{3}$$

sind die beiden andern Wurzeln der Gleichung

$$x^3-\frac{1}{6}x-\frac{1}{24}=0.$$

Wenn in der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ a und b reell sind, und die Diskriminante:

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

kleiner als Null ist, so ist:

$$\sqrt{D} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

die Wurzel aus einer negativen Zahl, also selbst eine imaginäre Zahl. Demnach verlangen die oben mit 6) und 7) bezeichneten Gleichungen die Lösung einer binomischen Gleichung dritten Grades, bei welcher die Konstante eine nichtreelle, komplexe Zahl ist. Zu einer Zeit, als man den nichtreellen Zahlen noch nicht volles Bürgerrecht in der Arithmetik verliehen hatte, als man es also auch noch nicht verstand, eine Gleichung von der Form:

$$v^3 = p + iq,$$

wo q von Null verschieden ist, zu lösen, nannte man deshalb den Fall, wo D kleiner als Null ist, den „Casus irreducibilis". Es ist jedoch selbstverständlich, daß man durch die obige Lösungsmethode auch diesen Fall, wo $D < 0$ ist, mit umfassen muß; nur muß man es verstehen, drei Zahlen zu finden, deren dritte Potenz eine gegebene komplexe Zahl ist. Dieses lehrt aber § 19.

Wenn wir nämlich in Formel 6) voraussetzen, daß die Diskriminante

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \text{ kleiner als Null sei,}$$

so stellt die rechte Seite der Formel 6) eine nichtreelle Zahl dar, die wir in der Form

$$-\frac{b}{2} \pm i\sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

schreiben können, wo nun, wegen der gemachten Voraussetzung,

$$-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

positiv sein muß, also die Wurzel daraus reell. Der Modulus ρ der komplexen Zahl, die wir auf der rechten Seite der Formel 6) erhalten haben, ist:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}\right)^2}$$

also:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left[-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3\right]} = \sqrt{-\left(\frac{a}{3}\right)^3} = \sqrt{\left(-\frac{a}{3}\right)^3}$$

oder:

$$\rho = \left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3,$$

wo nun $-\frac{a}{3}$ eine positive Zahl darstellt. Denn wegen der gemachten Voraussetzung ist $\left(\frac{a}{3}\right)^3$ sogar noch kleiner als $-\left(\frac{b}{2}\right)^2$, also kleiner als eine Zahl, die sicher negativ ist, weil das Quadrat von $\frac{b}{2}$ sicher positiv ist; was nach sich zieht, daß auch $\frac{a}{3}$ negativ, also $-\frac{a}{3}$ positiv ist. Das Argument ϑ der komplexen Zahl

$$-\frac{b}{2} + i\sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

ist $< 180^0$, und zwar um ebensoviel, wie das Argument der komplexen Zahl

$$-\frac{b}{2} - i\sqrt{-\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

größer als 180^0 ist, so daß sich ergibt, daß das Argument der letztgenannten komplexen Zahl $360^0 - \vartheta$ ist, wenn das Argument der erstgenannten gleich ϑ gesetzt ist. Hiernach ist ϑ aus

$$\cos\vartheta = \frac{-\frac{b}{2}}{\rho} = \frac{-\frac{b}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3}$$

eindeutig bestimmt. § 18 lehrt uns nun, daß wir den Modulus ϱ mit drei zu radizieren, das Argument ϑ aber durch drei zu dividieren haben, um zu den Lösungen der Gleichung 6) kommen zu können. Nun ist aber:

$$\sqrt[3]{\varrho} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3} = \sqrt{-\frac{a}{3}}.$$

Hiernach ergeben sich aus 6) und 7) durch § 18 für v und w, mit Benutzung der im § 19 eingeführten Abkürzung, die folgenden Werte:

$$v_1 = \left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, \frac{\vartheta}{3}\right); \quad v_2 = \left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, \frac{\vartheta}{3} + 120^0\right);$$

$$v_3 = \left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, \frac{\vartheta}{3} + 240^0\right);$$

$$w_1 = \left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, \frac{360 - \vartheta}{3}\right); \quad w_2 = \left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, \frac{360 - \vartheta}{3} + 120^0\right);$$

$$w_3 = \left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, \frac{360 - \vartheta}{3} + 240^0\right).$$

Von den neun möglichen Zusammenfassungen sind aber nur die zu wählen, für welche die Gleichung 3):

$$v \cdot w = -\frac{a}{3}$$

erfüllt wird. Da das Produkt der Moduli immer $-\frac{a}{3}$ ist, so ist nur darauf zu achten, daß die Summe der Argumente 0 Grad oder 360 Grad beträgt. Dies paßt nur, wenn wir zusammenfassen:

$$v_1 \text{ mit } w_3, \quad v_2 \text{ mit } w_2, \quad v_3 \text{ mit } w_1.$$

Da bei jeder dieser wegen 3) allein richtigen Zusammenfassungen die Argumente sich zu 360 Grad ergänzen, und da bei solchen Argumenten die Cosinusse gleich werden, die Sinusse aber sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so erhalten wir:

$$10)\quad \begin{cases} x_1 = v_1 + w_3 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos\frac{\vartheta}{3}; \\ x_2 = v_2 + w_2 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta}{3} + 120^0\right); \\ x_3 = v_3 + w_1 = 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta}{3} + 240^0\right). \end{cases}$$

Das Lösungsverfahren bei der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$, falls $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$ ist, besteht also darin, daß man zunächst den Winkel ϑ bestimmt aus:

$$\cos\vartheta = \frac{-\frac{b}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3}.$$

Dann teilt man ϑ in drei gleiche Teile und findet aus $\frac{\vartheta}{3}$ durch 10) die drei gesuchten Wurzeln. Wir erkennen, daß in unserm Falle sich immer drei reelle Wurzeln ergeben, so daß wir das folgende Resultat aussprechen können:

Wenn in der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$, a und b reell sind und der Ausdruck

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

negativ, d. h. kleiner als Null wird, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln.

Für diesen früher Casus irreducibilis genannten Fall diene folgendes Beispiel:

Um die Gleichung $x^3 - 19x - 30 = 0$ zu lösen, wo $a = -19$, $b = -30$ ist, erhält man:

$$\cos\vartheta = \frac{+15}{\left(\sqrt{\frac{19}{3}}\right)^3}, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} \log 19 &= 1{,}27875 \\ \log\ 3 &= 0{,}47712 \\ 2)\ &\overline{0{,}80163} \\ &\overline{0{,}40082} \end{aligned}$$

$$\log\left(\sqrt{\frac{19}{3}}\right)^3 = \overline{1{,}20246} \qquad 3$$

$$\log 15 = 1{,}17609$$

$$\log\cos\vartheta = \overline{9{,}97363} - 10 \parallel \vartheta = 19^\circ 42';$$

$$\frac{\vartheta}{3} = 6^\circ 34'$$

$$\log\cos 6^\circ 34' = 9{,}99714 - 10$$

$$\log\sqrt{\frac{19}{3}} = 0{,}40082$$

$$\overline{0{,}39796}$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$\log x_1 = \overline{0{,}69899};\ x_1 = +5.$$

$$\cos 126^\circ 34' = -\cos 53^\circ 26';\ \cos 246^\circ 34' = -\cos 66^\circ 34'.$$

Daher:

$$\log\cos 53^\circ 26' = 9{,}77507 - 10$$

$$\log\sqrt{\frac{19}{3}} = 0{,}40082$$

$$0{,}17589$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$0{,}47692;\ -x_2 = +3,\ \text{also}\ x_2 = -3;$$

$$\log\cos 66^\circ 34' = 9{,}59954$$

$$\log\sqrt{\frac{19}{3}} = 0{,}40082$$

$$10{,}00036$$

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$10{,}30139;\ -x_3 = +2;\ +x_3 = -2.$$

Jede der gefundenen drei Wurzeln $+5$, -3, -2 erfüllt die gegebene Gleichung. Eine zweite Probe besteht darin, daß man den im § 21 besprochenen Zusammenhang

der Koeffizienten mit den Wurzeln einer algebraischen Gleichung benutzt. In der Tat ergibt sich, daß die in der gegebenen Gleichung gleich Null gesetzte ganze Funktion $x^3 - 19x - 30$ gleich

$$(x-5)(x+3)(x+2)$$

wird.

Wie in dem früher behandelten Fall, wo $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$ war, kann man auch hier, nachdem man eine Wurzel gefunden hat, die beiden andern durch Division finden. Hat man gefunden, daß die Gleichung

$$x^3 - 19x - 30 = 0$$

für $x = 5$ richtig wird, so dividiere man $x^3 - 19x - 30$ durch $x - 5$, wodurch man $x^2 + 5x + 6$ erhält. Die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

oder $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$ sind die gesuchten beiden andern Wurzeln.

Die obige Lösung läßt sich auch anwenden, wenn

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

ist, also

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = -\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

ist. Denn dann kommt für $\cos\vartheta$: -1 bezw. $+1$, je nachdem b positiv oder negativ war, woraus folgt, daß ϑ gleich 180^0 oder 0^0, $\frac{\vartheta}{3}$ gleich 60^0 oder 0^0, $\frac{\vartheta}{3} + 120^0$ gleich 180^0 oder 120^0, $\frac{\vartheta}{3} + 240^0$ gleich 300^0 oder 240^0 wird, immer, je nachdem b positiv oder negativ ist. Im ersten Falle erhält man:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2}} = +\sqrt{-\frac{a}{3}};$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot (-1) = -2\sqrt{-\frac{a}{3}};$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) = +\sqrt{-\frac{a}{3}}.$$

Im zweiten Falle erhält man:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot (+1) = +2\sqrt{-\frac{a}{3}};$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{-\frac{a}{3}};$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{a}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{-\frac{a}{3}};$$

Beide Resultate sind in Übereinstimmung mit dem schon oben erkannten Satze, daß, wenn $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$ ist, die Gleichung drei reelle Wurzeln hat, von denen zwei einander gleich sind. Auch lassen sich die hier gefundenen Resultate, wonach die drei Wurzeln

$$\pm 2\sqrt{-\frac{a}{3}},\ \mp\sqrt{-\frac{a}{3}},\ \mp\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

sind, aus den oben gefundenen Resultaten ableiten, nach denen die drei Wurzeln folgende sind:

$$2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}},\ -\sqrt[3]{-\frac{b}{2}},\ -\sqrt[3]{-\frac{b}{2}}.$$

Denn aus

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0 \text{ folgt: } \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} = \sqrt{-\frac{a}{3}}.$$

Bisher ist noch nicht die allgemeine Gleichung dritten Grades:

$$x^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

behandelt, sondern nur der spezielle Fall, in welchem $c = 0$ ist. Doch läßt sich die Lösung der allgemeinen Gleichung dritten Grades leicht auf die oben behandelte Lösung des Spezialfalls, wo $c = 0$ ist, zurückführen. Setzt man nämlich in

$$x^3 + cx^2 + dx + e = 0:$$

$$x = y - \frac{c}{3},$$

so erhält man:

$$y^3 - 3 \cdot y^2 \cdot \frac{c}{3} + 3 \cdot y \cdot \frac{c^2}{9} - \frac{c^3}{27}$$
$$+ c \cdot y^2 - c \cdot 2y \cdot \frac{c}{3} + c \cdot \frac{c^2}{9}$$
$$+ dy - d \cdot \frac{c}{3}$$
$$+ e = 0;$$

oder:

$$y^3 + \left(d - \frac{c^2}{3}\right)y + \left(e - \frac{dc}{3} + \frac{2c^3}{27}\right) = 0.$$

Dieses Zurückführen einer in x gegebenen Gleichung dritten Grades auf eine Gleichung in y, bei der der Koeffizient von y^2 Null ist, nennt man „Reduzieren". Um z. B. die Gleichung:

$$x^3 + 9x^2 - 3x + 70 = 0$$

zu reduzieren, hat man $x = y - \frac{c}{3} = y - \frac{9}{3} = y - 3$ zu substituieren, wodurch man die reduzierte Gleichung:

$$y^3 - 30y + 133 = 0$$

erhält. Für diese Gleichung erhielten wir oben im ersten Beispiel zu dem Fall, wo $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$ war, die Wurzeln:

$$y_1 = -7;\ y_2 = +\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3};\ y_3 = +\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3},$$

woraus für x folgt:

$$x_1 = -7 - 3 = -10;\ x_2 = +\frac{7}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3} - 3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\sqrt{3};$$
$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{3}.$$

Bei diesem Beispiel war die reduzierte Gleichung von der Art, daß die Diskriminante $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ größer als Null war, also nur eine reelle Wurzel vorhanden war, sowohl in der reduzierten wie in der ursprünglich gegebenen Gleichung.

Auf eine reduzierte Gleichung, bei welcher die Diskriminante $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$ kleiner als Null ist, also drei reelle Wurzeln vorhanden sind, kommt man bei dem folgenden Beispiel.

Es sei:

$$x^3 - 15x^2 + 56x - 60 = 0$$

zu lösen. Man hat $x = y + 5$ zu setzen, und erhält

$$y^3 - 19y - 30 = 0,$$

eine Gleichung, für die oben die drei Wurzeln:

$$y_1 = +5,\ y_2 = -3,\ y_3 = -2$$

berechnet sind, so daß sich für x ergibt:

$$x_1 = +10,\ x_2 = +2,\ x_3 = +3.$$

Daß

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) &= (x - 10)(x - 2)(x - 3)\\ &= x^3 - 15x^2 + 56x - 60\end{aligned}$$

ist, also die ganze Funktion herauskommt, die in der gegebenen Gleichung gleich Null gesetzt ist, liefert eine Bestätigung.

Übungen zu § 22.

Wie heißen die drei Wurzeln von:

1) $x^3 = 8$? 2) $x^3 = -8$? 3) $x^3 = 125$? 4) $8x^3 = 343$?

5) $x^3 = -\frac{729}{512}$?

I.

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0.$$

A) Jede der beiden Kubikwurzeln wird rational.

6) $x^3 - 6x - 9 = 0$; 7) $x^3 - 18x - 35 = 0$; 8) $x^3 = 6x - 9$;

9) $x^3 - 9x - 28 = 0$; 10) $x^3 - 30x - 133 = 0$;

11) $x^3 = 90x + 341$; 12) $8x^3 = 12x + 9$; 13) $\frac{335}{x} = x^2 + 42$;

14) $4x(6x^2 - 1) = 1$.

B) Jede der beiden Kubikwurzeln wird irrational, aber ihre Summe rational.

15) $4x^3+3x=7$; 16) $x^3-18x-108=0$; 17) $4x^3+33x=37$;

18) $x^3+135x=1026$; 19) $x^3+3x=-76$;

20) $9x(3x^2-1)=-52$; 21) $\frac{7}{x(4x^2-1)}=\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}$.

C) Jede der beiden Kubikwurzeln und auch ihre Summe wird irrational.

22) $x^3+6x+2=0$; 23) $x^3+12(x+1)=0$.

D) In Buchstaben.

24) $x^3-6abx=8a^3+b^3$; 25) $x^3=3(b^2-a^2)x+2b(b^2+3a^2)$.

E) Die Gleichung ist erst zu reduzieren.

26) $x(x^2+6)=3x^2+4$; 27) $x^3=4(x^2-2x+2)$;

28) $x^3-3x^2-50=0$; 29) $x^3-21+x^2=5x$.

II.

$$\left(\frac{b}{2}^2\right)+\left(\frac{a}{3}\right)^3<0.$$

30) $x^3-7x-6=0$; 31) $x^3=19x+30$;

32) $\frac{x^3}{27}=x-2$; 33) $(x+5)(x+6)=\frac{6x(3x+31)}{x+7}$;

34) $x^3+11x=6(x^2+1)$; 35) $x^3-2x^2=5x-6$;

36) $900=19x^2-x^3$; 37) $x^3+100=3x(20-x)$.

III.

Gleichungen, die auf Gleichungen dritten Grades führen.

38) $\sqrt[3]{4x^2+10x+2}=2x+1$; 39) $\sqrt{2+x+\sqrt{1+2x}}=1+\frac{x}{2}$;

40) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-7}=3$; 41) $\sqrt{2x}=\sqrt[3]{5x-2}$;

42) $x^6 = 12x^2 + 16$; 43) $2^{x^3} = 4 \cdot 2^{3x}$;

44) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 10 \\ x^3 + y^3 = 28 \end{array}\right\}$; 45) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 10 \end{array}\right\}$;

46) $\sqrt{x-3} = \sqrt[3]{4-y} = z$.

IV.

Gleichungen dritten Grades in Worten.

47) Welche Zahl übertrifft ihre dritte Potenz um $\frac{8}{27}$?

48) Welcher Bruch ist gleich der Kubikwurzel seines um $\frac{1}{27}$ verminderten Wertes?

49) Wie heißt die aus vier Gliedern bestehende geometrische Reihe, deren Anfangsglied 2 heißt, und deren Summe 80 beträgt?

50) Bei wieviel Punkten im Raume gibt es im ganzen 56 Verbindungsebenen je dreier Punkte?

51) Wie lang ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Höhe 6 Zentimeter beträgt, und dessen eine Kathete um 1 Zentimeter kürzer ist, als die Hypotenuse?

52) Eine Kiste hat ein Volumen von 4 Kubikmeter, eine räumliche Diagonale von 3 Meter und eine Oberfläche von 16 Quadratmeter. Wie lang sind ihre Kanten?

53) Ein Quadrat ist durch Parallelen mit den Seiten in quadratische Felder geteilt, und in diese Felder sind die natürlichen Zahlen von 1 an derartig eingeschrieben, daß die Summe der Zahlen in jeder horizontalen oder vertikalen oder diagonalen Zeile 65 beträgt (Magisches Quadrat*). In wieviel Felder zerfiel das Quadrat?

V.

Theoretische Fragen.

54) Wenn x_1 eine Wurzel einer Gleichung dritten Grades ist, die $x^3 + ax + b = 0$ heißt, so sind die beiden andern Wurzeln gleich:

*) Vergleiche des Verfassers „Mathematische Mußestunden“ (Leipzig, 1900).

$$-\frac{1}{2}x_1 \pm \sqrt{-\frac{3}{4}x_1^2 - a}$$

Warum?

55) Bestimme die beiden komplexen dritten Wurzeln der Einheit durch Lösen einer quadratischen Gleichung.

56) Berechne die komplexen, siebenten Wurzeln der Einheit durch Lösen der symmetrischen Gleichung

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

57) Aus welchem Satze von § 21 folgt, daß die Summe der drei Wurzeln einer reduzierten Gleichung dritten Grades Null sein muß?

58) Damit die mit v und w bezeichneten dritten Wurzeln, die zur Lösung der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ dienen, beide rational werden, muß $a = -3vw$, $b = -v^3 - w^3$ sein. Warum?

59) Welche Gleichung muß zwischen a und b bestehen, damit die Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ zwei gleiche Wurzeln habe?

60) Leite für den Fall, daß $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$ ist, die Lösung der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ aus der folgenden Formel ab:

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}.$$

61) Beweise, daß der Hilfswinkel ϑ, dessen Cosinus gleich

$$\frac{-\frac{b}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)^3}$$

zu setzen ist, 0 Grad oder 180 Grad betragen muß, falls $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$ ist.

Entscheide, ob die folgenden Gleichungen eine oder drei reelle Wurzeln haben:

62) $x^3 - 9x + 16 = 0$; 63) $x^3 - 11x - 20 = 0$;

64) $x^3 - 125 = 0$; 65) $x^3 + x + 1 = 0$; 66) $x^3 - x + 1 = 0$.

Welche Substitution ist erforderlich, um die folgenden Gleichungen zu reduzieren?

67) $x^3 + x^2 - 5x - 8 = 0$; 68) $x^3 - 24x^2 + 9 = 0$;

69) $x^4 - 8x^3 + 9x - 2 = 0$; 70) $x^5 - 5x^4 + 48 = 0$.

71) Auf welche reduzierte Gleichung führt:

$$x^3 + cx^2 + \frac{c^2}{3}x + \frac{c^3}{27} = 0?$$

72) Welche Bedingungs-Ungleichung muß zwischen den drei Koeffizienten c, d, e bestehen, damit die Gleichung $x^3 + cx^2 + dx + e = 0$, wo c, d, e reell sind, drei reelle Wurzeln hat?

73) Drücke jede Wurzel der Gleichung $x^3 + fx^2 + g = 0$ durch f und g aus.

Ausgewählte Resultate zu den Übungen.

Zu § 1.

21) 3,236; 22) −0,071; 23) −1; 24) 1,920; 25) 0,348;
26) 31,623; 27) 1,897; 28) 0,447; 29) 1,500; 30) 0,954;
31) 1,442; 32) −3,464; 33) 3,750; 34) 0,121.
35) $1{,}732 < x < 1{,}733$ und $-1{,}733 < x < -1{,}732$;
36) $2{,}236 < x < 2{,}237$ und $-2{,}237 < x < -2{,}236$;
37) $1{,}414 < x < 1{,}415$ und $-1{,}415 < x < -1{,}414$;
38) $1{,}259 < x < 1{,}260$;
39) $2{,}236 < x < 2{,}237$ und $-2{,}237 < x < -2{,}236$;
40) $3{,}854 < x < 3{,}855$ und $-2{,}855 < x < -2{,}854$;
41) $2{,}236 < x < 2{,}237$ und $-2{,}237 < x < 2{,}236$ und $+2$ und -2;
42) $-1{,}443 < x < -1{,}442$.

Zu § 2.

21) Vier Addenden; 24) der Grenze 3; 26) der Grenze $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; 27) der Grenze 3; 30) die Zahl 3; 35) der Grenze 6; 36) der Grenze $\frac{1}{2}$; 38) 8; 39) 1; 43) $\sqrt{10}$; 44) 100.

Zu § 4.

13) 6; 16) Null; 17) Null; 18) 1; 19) 1; 20) 1; 21) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; 22) $\frac{\pi}{4}$.

Zu § 5.

25) Bei $x = 3$ Maximum von 48, bei $x = 5$ Minimum von 44;

26) Bei $x = -2$ Minimum von $-\frac{27}{12}$, bei $x = 0$ Maximum von $+\frac{5}{12}$, bei $x = +1$ neues Minimum von 0;

27) Bei $x = 0$ Maximum von $+1$, bei $x = \pi$ Minimum von -1.

28) Bei $x = \frac{1}{4}$ Minimum von $-\frac{1}{4}$;

29) Bei $x = +\sqrt{3}$ Minimum von $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$, bei $x = -\sqrt{3}$ Maximum von $+\frac{2}{3}\sqrt{3}$;

30) Dasjenige Rechteck, dessen Ecken die Mitten der Quadratseiten sind, und das deshalb ein Quadrat ist;

31) Vom Halbierungspunkt der Hypotenuse;

32) Das rechtwinklige Dreieck;

33) Derjenige, dessen Höhe $\frac{4}{3}$ vom Kugelradius ist;

34) Derjenige, dessen Höhe $2r + r\sqrt{2}$ ist, wo r den Kugelradius bedeutet;

35) Das gleichseitige Dreieck;

36) Die Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks müssen 45 Grad betragen;

37) Das Verhältnis muß 1 zu 1 sein;

38) $\frac{a^3}{216}$ Kubikzentimeter;

39a) Unter 45^0; 39b) $\frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ Meter;

40) Noch $10\frac{2}{3}$ Meter;

41) Um $\frac{1}{4}$.

Zu § 6.

15) 512; 16) 2217; 17) 0,098; 18) 0,7016; 19) $+3$;

20) $\frac{3}{2}$; 21) $\frac{8}{7}$; 22) Das zwölfte; 23) -1;

25) 1023; 26) 147620; 27) 19,9; 29) Acht Glieder;
30) 4095; 31) Sechs Glieder; 37) $\sqrt[19]{2}$;
38) Das erste Glied heißt 8, das siebente $91\frac{1}{8}$;
40) 4, 20, 100, 500 u. s. w.; 41) viermalsoviel;
43) Vor 6 Uhr nachmittags.

Zu § 7.

15) 729; 19) $\frac{3-x}{(1-x)^2}$.

Zu § 8.

15) 1480 Mark; 16) 4,14 Prozent; 17) In 12 Jahren; 18) In 17 bis 18 Jahren; 19) 1734 Mark; 20) 3802 bis 3803 Mark; 21) 128000 Kubikmeter; 22) 29 Millionen und 8 hunderttausend bis 9 hunderttausend Mark; 23) 443 Tausend und 200 Einwohner; 24) 822 Mark; 25) 7,4 Prozent; 26) Bei 4,66 Prozent; 27) Bei 4,64 Prozent; 28) 28280 Mark; 29) 30269 bis 30270 Mark; 30) 34111 Mark; 31) 387 Mark; 32) Wenig über 20 Jahre; 33) 115512 Mark; 34) Im Jahre 1912; 35) In 13 Jahren; 36) 1207 bis 1208 Kubikmeter; 37) 5419 Mark; 38) Die Rente von 1600 Mark auf 12 Jahre hat größeren Barwert als die Rente von 1200 Mark auf 16 Jahre.
39) 6 Jahre lang; 40) 1019 Mark 40 Pf.; 42) 0,78 Prozent;
43) Nach fast 29 Jahren; 44) 8879 Mark und 9379 Mark; 50) Im Jahre 1932.

Zu § 9.

9) 7,3891; 13a) $2 \log e = 0{,}86859$; 13b) $\frac{1}{2} \log e = 0{,}21715$.

Zu § 10.

3) 1; 4) 4; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{a}{q-1}$; 7a) ∞; 7b) ∞; 7c) $\frac{1}{1-x}$;
8a) $\pm\infty$; 8b) $+1$ oder 0; 8c) $\frac{1}{1+x}$; 9a) ∞; 9b) ∞;
9c) $\frac{1}{1-x^2}$; 10a) für $x>1$, aber <2 kommt $\frac{2}{2-x}$; aber für $x \gtreqless 2$ kommt ∞; 10b) 2; 10c) $\frac{2}{2-x}$; 12b) $1\frac{1}{2}$ und $2\frac{1}{2}$;

15) $-1 < x \leqq +1$; 22) $-\infty < x < +\infty$; 23) $-\infty < x < +\infty$;
24) $-\infty < x < +\infty$; 25) $-1 < x < +1$; 26) $-1 < x \leqq +1$;
27) $-1 \leqq x < +1$.

Zu § 11.

6) $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -4$, $a_3 = -4$, $a_4 = +5$ u. s. w.;
7) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3$, $a_6 = 4$, $a_7 = 4$ u. s. w.; 8) $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{8}$, $a_3 = +\frac{1}{16}$, $a_4 = -\frac{5}{128}$ u. s. w.; 9) $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$ u. s. w.;

10) $1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \ldots$ und $-1 < x < +1$;

11) $1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \ldots$ und $-1 < x < +1$;

12) $1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^5 - \ldots$ und $-1 < x < +1$.

Zu § 12.

6) 7,389; 7) 1,649; 8) 0,368; 9) 0,135; 10) 0,779;
11a) 2,303; 11b) 4,605; 11c) 0,347; 19) 128400 Kubikmeter; 20) 3,466 Prozent.

Zu § 13.

2) 0,434; 3) 0,868; 4) 0,5; 5) -1; 6) 0,402; 7) 1,443;
8) 0,831; 17) 1,099; 19) $\log 2 = 0{,}301$; $\log 3 = 0{,}477$; $M = 0{,}434$;

22) $\log 41 = 8 \log 3 - 4 \log 2 - 1 - 2M\left[\frac{1}{13121} + \frac{1}{3 \cdot 13121^3} + \ldots\right]$.

Zu § 14.

17) 98, 99, 100; 16) 63, 64, 65; 17) 34, 35, 36;
18) 19, 20, 21; 19) 124, 125, 126.

Zu § 15.

10) 1,41421; 11) 1,41421; 12) 1,73205; 13) 1,25992;
14) 2,03054; 15) 2,01235; 16) 2,0052; 22) $\frac{1}{n}$.

Zu § 16.

1a) 0,50000; 1b) 0,86603; 2a) 0,86603; 2b) 0,50000;
3a) 0,58779; 3b) 0,80902; 4a) 0,64279; 4b) 0,76604;
5a) 0,70711; 5b) 0,70711; 6a) 0,05234; 6b) 0,99863.

Zu § 17.

6) $\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$;

9) $p = \frac{1}{9}$; 10) $p = \frac{1}{11}$; 11) $p = 2 - \sqrt{3}$;

12) $p = \frac{5\sqrt{3} - 6}{13}$; 13) $p = \frac{1}{5}$; 14) $p = -\frac{3}{29}$;

16) 6 Billionen 283185 Millionen 307179 Millimeter;

17) 4188 Millionen 790204 Kubikmeter 786390 Kubikzentimeter 984 bis 985 Kubikmillimeter.

Zu § 18.

24) $-60\sqrt{2} - i\cdot 60\sqrt{2}$; 27) $-61\sqrt{3} + 16\cdot i$; 28) $4i\sqrt{2}$;

29) $1 - i\sqrt{3}$; 30) $+i$; 31) $\frac{1}{486}\sqrt{2} - i\cdot\frac{1}{486}\sqrt{2}$;

32) $0{,}42262 + i\cdot 0{,}90631$; 42) $0{,}76604 + i\cdot 0{,}64279$;

43) $0{,}95106 + i\cdot 0{,}30902$; 44) $\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\frac{1}{2}$;

45) $0{,}99863 + i\cdot 0{,}05234$; 46) $\sqrt[3]{4}(\cos 80^0 + i\sin 80^0)$;

47) $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\frac{1}{2}$; 48) $\frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{2}$;

49) $\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\cos 67\frac{1}{2}^0 - i\sin 67\frac{1}{2}^0\right)$;

50) $\frac{\sqrt{3}}{27}\cos 120^0\,27',5 + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{27}\sin 120^0\,27',5$.

Zu § 19.

1) $\rho = 1$, $\vartheta = 135^0$, 315^0; 2) $\rho = \sqrt[3]{2}$, $\vartheta = 40^0$, 160^0, 280^0;
3) $\rho = \sqrt[3]{2}$, $\vartheta = 80^0$, 200^0, 320^0;
4) $\rho = 1$, $\vartheta = 45^0$, 135^0, 225^0, 315^0;
5) $\rho = 3$, $\vartheta = 0^0$, 72^0, 144^0, 216^0, 228^0;
6) $\rho = \sqrt[3]{10}$, $\vartheta = 20^0$, 80^0, 140^0, 200^0, 260^0, 320^0;
7) $\rho = 1$, $\vartheta = 0^0$, 45^0, 90^0, 135^0, 225^0, 270^0, 315^0;
8) $\rho = 1$, $\vartheta = 9^0$, 45^0, 81^0, 117^0, 153^0, 189^0, 225^0, 261^0, 297^0, 333^0;
9) 351^0; 10) 338^0; 11) 355^0.

Zu § 21.

2) $x^2 + x - 12 = 0$; 3) $x^3 - 31x + 30 = 0$;
4) $x^4 + 4x^3 - 47x^2 + 6x + 216 = 0$;
5) $x^5 - 4x^4 + \frac{83}{16}x^3 - \frac{41}{16}x^2 + \frac{3}{8}x = 0$;
6) $x^3 - \frac{143}{60}x^2 + \frac{227}{120}x - \frac{1}{2} = 0$; 7) $x^3 + x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{1}{32} = 0$;
8) $x^2 - 2x + 2 = 0$; 9) $x^3 - 10x^2 + 20x - 32 = 0$;
10) $x^7 + x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$;
11) $x^6 - 2x^5 + 2x^4 = 0$.

Zu § 22.

6) $x_1 = 3$; 7) $x_1 = 5$; 8) $x_1 = -3$; 9) $x_1 = 4$; 10) $x_1 = 7$;
11) $x_1 = 11$; 12) $x_1 = \frac{3}{2}$; 13) $x_1 = 5$; 14) $x_1 = \frac{1}{2}$;
10) $x_1 = 1$; 16) $x_1 = 6$; 17) $x_1 = 1$; 18) $x_1 = 6$;
19) $x_1 = -4$; 20) $x_1 = -\frac{4}{3}$; 21) $x_1 = 1$;
22) $x_1 = -0{,}3275$; 23) $x_1 = -0{,}9324$; 26) $x_1 = 1$;
27) $x_1 = 2$; 28) $x_1 = 5$; 29) $x_1 = 3$.

Eine der Wurzeln ist:

30) $x = -1$; 31) $x = -2$; 32) $x = -6$; 33) $x = 3$;

34) $x = 1$; 35) $x = 1$; 36) $x = 10$; 37) $x = 2$; 38) $x = \frac{1}{2}$;

39) $x = 4$; 40) $x = 8$; 41) $x = 2$; 42) $x = 2$; 43) $x = -1$.

44) $\left\{\begin{matrix} x = 3 \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$; 45) $\left\{\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{matrix}\right\}$; 46) $\left\{\begin{matrix} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{matrix}\right\}$.

47) $\frac{1}{3}$; 48) $\frac{2}{3}$; 49) 2, 6, 18, 24; 50) bei acht Punkten;

51) 13 Zentimeter; 52) 1 Meter, 2 Meter, 2 Meter lang;
53) In 25 Felder.